بسم الله الرحمن الرحیم

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

وحید دامن‌افشان

عضو هیأت علمی دانشگاه کرمانشاه

انتشارات دانشگاه کرمانشاه

۱۴۰۱

سرشناسه	: دامن‌افشان، وحید، ۱۳۰۰
عنوان	: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی
مشخصات نشر	: کرمانشاه، دانشگاه کرمانشاه، ۱۴۰۱=۲۰۲۲ م.
مشخصات ظاهری	: ع+۳۷۳ ص. مصور، جدول.
فروست	: دانشگاه کرمانشاه؛ ۲۳۶
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۰۰۰۰-۰۰-۹
یادداشت	: پشت جلد به انگلیسی: Calculus and Analytic Geometry
یادداشت	: کتاب‌نامه
یادداشت	: نمایه
موضوع	: علوم پایه
شناسه افزوده	: دانشگاه کرمانشاه
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۳ ۵آ ۶ ن / ۲/XX۸۰۰
رده‌بندی دیویی	: ۵۰۰/۵

دانشگاه فلان

انتشارات دانشگاه کرمانشاه ۱۱۱

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

تألیف: وحید دامن‌افشان

ویراستار ادبی: علی جبرائیلی

صفحه‌آرا: وحید دامن‌افشان

ناشر: دانشگاه کرمانشاه

تاریخ و نوبت چاپ: ۱۴۰۱—هشتم

شمارگان: ۱۰۰۰

قیمت: ۲۷۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۰۰۰۰-۰۰-۹

قطع: وزیری

چاپخانه: زلال

مراکز پخش: بوستان، گلستان

مسئولیت درستی مطالب به عهده نویسنده است.

تقدیم به همه آن‌هایی که می‌خواهند بیشتر بدانند...

پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد و اهمیت روزافزون ریاضیات عمومی در کمک به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نیز نظر به اینکه کتاب‌های ریاضی‌ای که تاکنون به زبان فارسی در رابطه با موضوع ریاضیات عمومی ترجمه یا تالیف شده‌اند، نیازهای فعلی جامعه ریاضی و علمی را برآورده نمی‌کنند، تصمیم به تالیف کتاب حاضر گرفته شد.

سطح این کتاب به گونه‌ای است که برای دانشجویان سال اول دوره کارشناسی رشته ریاضی و دانشجویان کارشناسی رشته‌های فیزیک، مکانیک و سایر رشته‌های مرتبط قابل استفاده است.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات عمومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

کتاب حاضر از شش فصل تشکیل شده است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه مورد بررسی قرار گرفته و نیز قضیه اساسی وجودی و منحصر بفردی جواب بیان شده است.

در فصل دوم، مباحث و مطالب فصل اول، روی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسیع داده شده است. همچنین در این فصل، سه روش مختلف برای حل سیستم معادلات ارایه

شده است. لازم به ذکر است که روش حل سیستم معادلات با استفاده از روش جردن، بیشتر برای دوره‌های کارشناسی ارشد آورده شده است؛ لذا برای دوره‌های کارشناسی می‌توان از مطالعه این روش، چشم‌پوشی کرد. در ادامه فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه nام و قضیه‌های مربوط به آن بررسی شده است.

فصل سوم در ارتباط با مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم است. در این فصل، قضیه‌های اساسی در ارتباط با مسایل مقدار مرزی، از جمله قضیه مقایسه‌ای و قضیه تفکیک آورده شده است.

در فصل چهارم، سیستم‌های دینامیکی معرفی شده است. تعاریف و مفاهیم نقاط ثابت، پایداری نقاط ثابت و تصویر فاز، با بیانی ساده و روان ارایه شده است.

فصل پنجم درباره سیستم‌های دینامیکی خطی در صفحه بحث می‌کند. به بیان دقیق‌تر، سیستم‌های خطی متعارف و سیستم‌های خطی ساده در صفحه، بیان و تصاویر فاز مربوط به آن‌ها مورد کاوش قرار گرفته است.

فصل ششم درباره سیستم‌های غیرخطی در صفحه است. در واقع این فصل، دربرگیرنده مطالب تکمیلی فصل پنجم است. بیشتر مطالب این فصل، برای دوره‌های تحصیلات تکمیلی مناسب است.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات عمومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

وحید دامن‌افشان

کرمانشاه، تابستان ۱۴۰۱

فهرست مطالب

۱

مشتق و کاربرد آن در علوم مهندسی

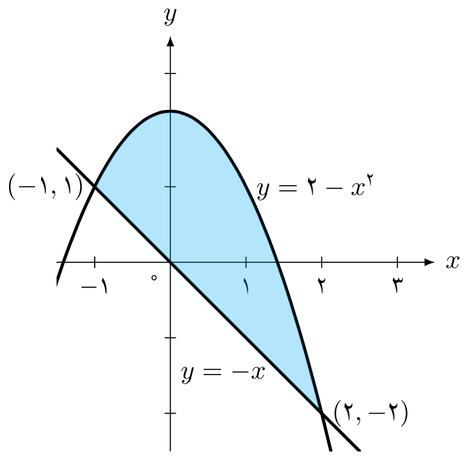
مشتق به طور گسترده در علوم پایه، اقتصاد، پزشکی و علوم کامپیوتر برای محاسبه سرعت اولیه و شتاب و به به منظور توضیح رفتار ماشین‌آلات، تخمین میزان افت آب در هنگام پمپ شدن آب از تانکر آب و پیشگویی نتایج ایجاد خطا در اندازه‌گیری‌ها به کار می‌رود. پیدا کردن مشتق‌ها می‌تواند طولانی و سخت باشد. می‌توان گفت مشتق یکی از ارکان اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال محسوب می‌شود. در این فصل تکنیک‌هایی برای محاسبه آسان‌تر آن‌ها بیان می‌شود [۴].

۱.۱ یادآوری حدهای یک‌طرفه و کاربرد آن‌ها

در این بخش ابتدا حدهای یک‌طرفه را یادآوری کرده و بعد از آن، به بیان مفهوم مشتق می‌پردازیم. سپس روابط و قضایای مشتق‌گیری را بیان می‌کنیم. در تعریف $\lim_{x\to a} f(x)$، xهایی را در نظر می‌گیریم که در یک بازهٔ باز شامل a و نه خود a باشند؛ یعنی مقادیر x نزدیک به a را، چه بزرگ‌تر از a باشند و چه کوچک‌تر از آن باشند.

حال فرض کنید تابعی مانند $f(x) = \sqrt{x-۴}$ داریم. چون برای $x < ۴$، مقدار $f(x)$ وجود ندارد، بنابراین f در هیچ بازهٔ باز شامل ۴ تعریف نشده است. لذا $\lim_{x\to ۴} \sqrt{x-۴}$

بی‌معنی است. از آنجایی که استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری از توابع، کاری زمان‌بر است، در این بخش، قضایایی را مطرح می‌کنیم که با کمک آن‌ها بتوان مشتق توابع را به سادگی به دست آورد. شکل ۱.۱ را ببینید که در آن، ناحیهٔ محصور بین نمودار $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱ ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$

با وجود این، اگر x را فقط به مقادیر بزرگ‌تر از ۴ محدود کنیم، می‌توانیم مقدار $\sqrt{x - ۴}$ را به اندازهٔ دلخواه به ۰ نزدیک کنیم؛ در چنین حالتی، x را از سمت راست به ۴ میل می‌دهیم و آن‌را حد یک‌طرفه از راست و یا حد راست می‌نامیم. بنابراین

$$\lim_{x \to ۴^+} \sqrt{x - ۴} = ۰.$$

حد چپ نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود.

اگر تابع f در $x_۱$ تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در $x_۱$ با $f'_+(x_۱)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰^+} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۱.۱)$$

و یا به عبارت دیگر، تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. در ادامه، چند قضیه

و مثال بیان می‌شود تا خواننده بیشتر با مفاهیم حد و مشتق آشنا شود. برای بحث بیشتر می‌توان به کتاب‌های پیشرفته‌تر حساب دیفرانسیل مراجعه کرد.

قضیه ۱.۱.۱ (وجود حد) گوییم $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد و برابر L است، اگر و تنها اگر

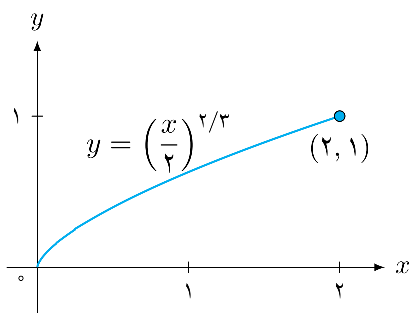
$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

هر دو موجود و برابر با L باشند.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید تابع f مطابق شکل ۲.۱ و با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

تعریف شده است. آیا حد[۱] تابع f وجود دارد؟



شکل ۲.۱ نمودار تابع $y = (x/۲)^{۲/۳}$ در بازه $[۰, ۲]$

حل. با توجه به تعریف تابع، اگر x عددی کوچک‌تر از ۰ باشد، $f(x)$ دارای مقدار ثابت ۱− است. لذا $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$. با استدلالی مشابه، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = +۱.$$

[۱] در ادامه فرض می‌شود خواننده تا حدودی با مفاهیم پایه‌ای حد آشناست.

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

و لذا حل مثال به پایان می‌رسد. ■

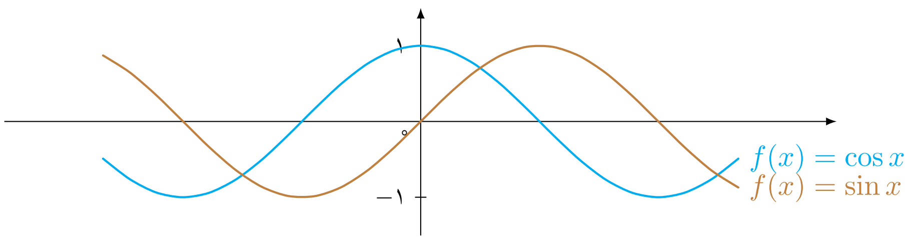
در معنی شناسی نمادین، برنامه‌ها و قطعه‌برنامه‌ها، به عنصرهایی از ساختارهای ریاضی مانند دامنه‌ها از دیدگاه اسکات[1] نگاشته می‌شود. اگر سیستم مدل‌بندی شده توانایی ایجاد انتخاب‌های تصادفی (یا انتخاب‌های شبه تصادفی) را داشته باشد، آنگاه منطقی است که رفتار خود را به وسیله اندازه‌ای که احتمال را برای سیستم ثبت می‌کند، مدل‌بندی کند تا زیرمجموعه اندازه‌پذیری از مجموعه همه حالت‌های ممکن بشود. این ایده‌ها برای اولین بار توسط صاحب جهرمی[2] و کازن[3] مطرح شد. هنگامی که کازن با فضاهای اندازه مطلق کار می‌کرد، اندازه‌های (احتمال) در نظر گرفته شده قبلی، به وسیله مجموعه‌های اسکات‌ـ باز یک dcpo گسترش پیدا کرد.

این ارتباط بین محاسبه‌پذیری و توپولوژی، بطور بسیار واضح توسط اسمیت[4] شرح داده شده و بعدها توسط آبرامسکی[5]، ویکرز[6] و دیگران، بیشتر توسعه داده شد.

تعریف ۳.۱.۱ (مشتق تابع) مشتق تابع f، تابعی است که با علامت f' نشان داده می‌شود و مقدار آن در هر عدد x واقع در دامنهٔ f به صورت

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{۲.۱}$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. شکل ۳.۱ را ببینید.



شکل ۳.۱ نمودار دو تابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

[1]Scott [2]Saheb-Djahromi [3]Kozen [4]Smyth [5]Abramsky [6]Vickers

۲.۱ انتگرال معین و نامعین و کاربرد آن در مهندسی

در این بخش، مفهوم انتگرال‌های معین و نامعین را توضیح داده و سپس خواص انتگرال معین بیان می‌شود. همچنین بعضی از کاربردهای انتگرال معین توضیح داده می‌شود. بعد از آن، نوبت به انتگرال‌های نامعین می‌رسد و روش‌های انتگرال‌گیری برای این نوع انتگرال‌ها شرح داده می‌شود. از این روش‌ها بعدها در درس معادلات دیفرانسیل نیز استفاده می‌شود.

۱.۲.۱ انتگرال معین

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a, b]$ باشد. این بازه را به n زیربازه با انتخاب $n - ۱$ نقطه مانند $x_۱$، $x_۲$، . . . ، $x_{n-۱}$ بین a و b تقسیم می‌کنیم به شرطی که

$$a < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n-۱} < b.$$

برای ایجاد یکنواختی، a را با $x_۰$ و b را با x_n نشان می‌دهیم. شکل ۴.۱ را ببینید.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌های معین). *اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه یک cای در بازهٔ $[a, b]$ وجود دارد به طوری که*

$$f(c) = \frac{۱}{b - a} \int_a^b f(x)dx.$$

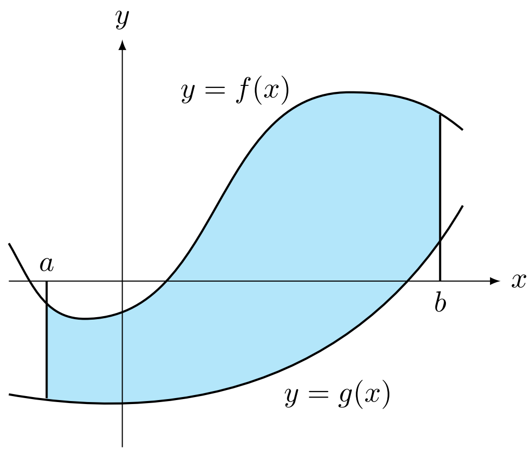
ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه [۳] می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم.

اگر f و g توابع پیوسته‌ای روی بازهٔ $[a, b]$ و با شرط $f(x) \geq g(x)$ باشند، آنگاه مساحت ناحیهٔ بین منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از a تا b برابر است با

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \qquad (۳.۱)$$

۲.۲.۱ منحنی‌های قاطع یکدیگر

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع،



شکل ۴.۱ ناحیه محصورشده بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$

حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. در فصل بعدی باز هم نمونه‌های دیگری را بررسی خواهیم کرد که باعث فهم بیشتر مبحث خواهد شد.

با توجه به شکل، طول قطعه‌خط خاص PQ برابر L است. بنابراین طول منحنی به وسیلهٔ جمع

$$\sum_{k=۱}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^۲ + (\Delta y_k)^۲}$$

تقریب زده می‌شود.

یادآوری ۱.۱ (محاسبه مشتق) اگر $x_۱$ عدد خاصی از دامنهٔ f باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f'(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۴.۱)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطهٔ (۴.۱) برای محاسبهٔ مشتق تابع f در یک نقطهٔ خاص مانند $x_۱$ استفاده می‌شود.

اگر در رابطهٔ (۴.۱) قرار دهیم $x_۱ + \Delta x = x$، آنگاه عبارت «$\Delta x \to ۰$» معادل

«$x \to x_1$» است. بنابراین با توجه به فرمول (۴.۱) می‌توان نوشت

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

تابع f را در x_1 مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_1)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۲.۲.۱. مساحت ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = 2 - x^2$ و خط $y = -x$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا نمودار هر دو منحنی را رسم می‌کنیم (شکل ۵.۱). طبق رابطهٔ (۳.۱)، قرار می‌دهیم $f(x) = 2 - x^2$ و $g(x) = -x$. حال برای حدود انتگرال‌گیری، معادلهٔ $2 - x^2 = -x$ را حل می‌کنیم. بنابراین $x^2 - x - 2 = 0$. لذا می‌توان نوشت

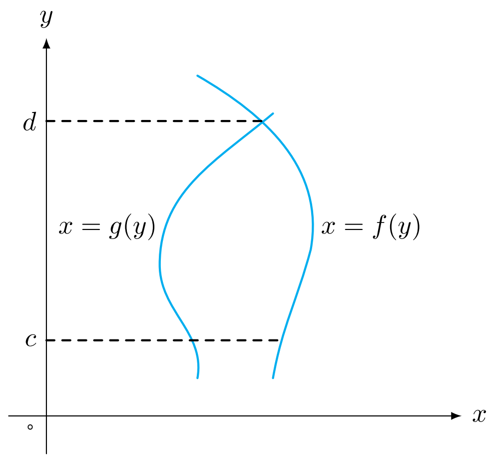
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)dx \\ &= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

که کار را تمام می‌کند. ■

این ایده‌ها برای اولین بار توسط صاحب جهرمی[1] و کازن[2] مطرح شد. هنگامی که کازن با فضاهای اندازه مطلق کار می‌کرد، اندازه‌های (احتمال) در نظر گرفته شده قبلی، به وسیله مجموعه‌های اسکات‌ـ‌باز یک dcpo گسترش پیدا کرد.

این ارتباط بین محاسبه‌پذیری و توپولوژی، بطور بسیار واضح توسط اسمیت[3] شرح داده شده و بعدها توسط آبرامسکی[4]، ویکرز[5] و دیگران، بیشتر توسعه داده شد.

[1] Saheb-Djahromi
[2] Lepoldo Smith Kozen
[3] George Smyth
[4] Abramsky
[5] John Vickers



شکل ۵.۱ نمودار منحنی‌های $x = g(y)$ و $x = f(y)$ در بازه $[c, d]$

روش گفته شده در بالا، روش دیسک (شکل ۵.۱) نام دارد. روش دیگری نیز برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران وجود دارد که به روش واشر، معروف شده است . در ادامه بیشتر با این روش آشنا خواهیم شد.[۱]

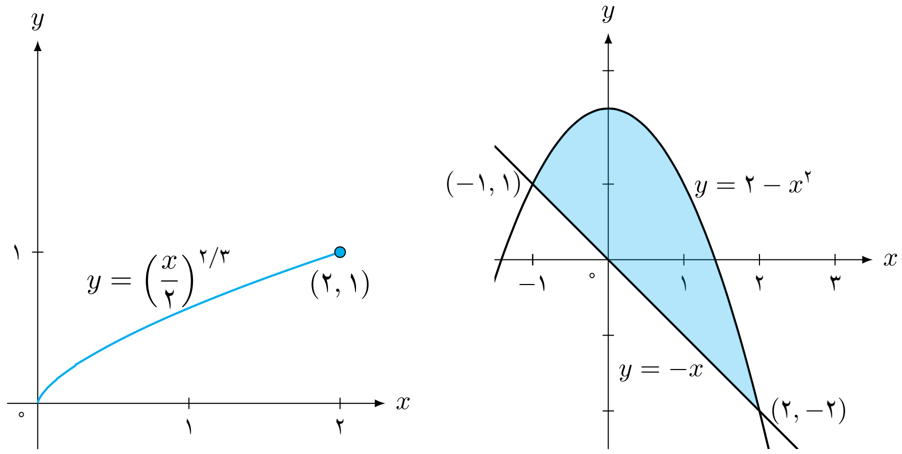
تعریف ۳.۲.۱ (روش واشر) هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^۲ - [r(x)]^۲)\, dx \qquad (۵.۱)$$

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است.

دقت داشته باشید که در فرمول (۵.۱) اگر $r(x)$ در سراسر بازهٔ $[a, b]$ صفر باشد، همان فرمول روش دیسک، نتیجه می‌شود. بنابراین روش دیسک، حالت خاصی از روش واشر است.

سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام‌یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به



(آ) ناحیهٔ ایجادشده توسط $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ (ب) نمودار تابع $y = (x/۲)^{۲/۳}$ در بازه I

شکل ۶.۱ نمودار تعریف ۳.۲.۱ در حالت متقارن

دست می‌آید.

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^۲ - [r(y)]^۲)\, dy + \int_۰^۱ \pi\left(\left[\frac{۳}{۲} - \sqrt{y}\right]^۲\right) dy.$$

۳.۱ محاسبهٔ طول منحنی‌ها با روشی ابتکاری

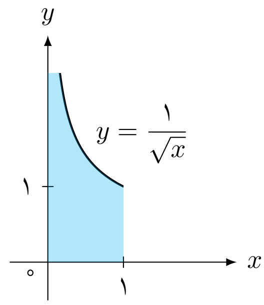
فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی $y = f(x)$ را از $x = a$ تا $x = b$ پیدا کنیم. طبق معمول، بازهٔ $[a, b]$ را افراز می‌کنیم و نقاط متناظر روی منحنی را با قطعه‌خط‌هایی به همدیگر وصل می‌کنیم تا یک مسیر چندضلعی تشکیل شود (شکل ۷.۱).

تعریف ۱.۳.۱ اگر f روی بازهٔ $[a, b]$ هموار باشد، طول منحنی $y = f(x)$ از a تا b برابر است با

$$L = \int_a^b \sqrt{۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\, dx = \int_a^b \sqrt{۱ + (f'(x))^۲}\, dx. \qquad (۶.۱)$$

گاهی ممکن است dy/dx در یک نقطهٔ خاص از بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشد. در این حالت

dx/dy را حساب می‌کنیم و x را بر حسب تابعی از y بیان می‌کنیم (شکل ۷.۱).



شکل ۷.۱ نمونه‌ای از تابعی با برد نامعین

۴.۱ انتگرال‌های ناسره

انتگرال‌های معینی که تا اینجا با آن‌ها سر و کار داشته‌ایم، دارای دو ویژگی بوده‌اند [۲]. یکی اینکه، دامنهٔ انتگرال‌گیری آن‌ها، یعنی a و b معین بود. دوم اینکه، برد انتگرالده روی این دامنه، معین بود. در این بخش یاد می‌گیریم که چگونه باید با این انتگرال‌ها برخورد کنیم (جدول ۱.۱).
فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی $y = f(x)$ را از $x = a$ تا $x = b$ پیدا کنیم. طبق معمول، بازهٔ $[a, b]$ را افراز می‌کنیم.

مثال ۱.۴.۱. همگرایی

$$\int_{۰}^{۳} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

را بررسی کنید.

حل. انتگرالده $f(x) = ۱/(x-۱)^{۲/۳}$ در $x = ۱$ نامتناهی می‌شود؛ اما روی $[۰, ۱)$ و $(۱, ۳]$ پیوسته است. همگرایی انتگرال روی $[۰, ۳]$ به انتگرال‌های از ۰ تا ۱ و ۱ تا ۳ بستگی دارد. روی $[۰, ۱)$ داریم

$$\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} = \lim_{b \to ۱^-} \int_{۰}^{b} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

جدول ۱.۱ نحوه عملکرد تابع f در ارتباط با پیوستگی

نام تابع	نقطه ناپیوستگی	نقطه بحرانی
تابع f	$x = ۱$	$a^۲ + ۳$
تابع g	$x = -۲$	$b - ۴$
تابع h	$x = ۰$	$a + b - ۷$

$$\begin{aligned} &= \lim_{b \to ۱^-} [۳(b-۱)^{۱/۳} - ۳(۰-۱)^{۱/۳}] \\ &= ۳ \end{aligned}$$

و لذا نتیجه به دست می‌آید. ■

۵.۱ محاسبهٔ حجم جسم‌های حاصل از دوران

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. در ادامه دربارهٔ حجم این نوع جسم‌ها بحث می‌کنیم.

۱.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور xها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^۲ \, dx \tag{۷.۱}$$

این ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم؛ اما اگر f و g توابع پیوستهٔ دلخواهی باشند، ناچاریم که مساحت مورد نظر را با استفاده از انتگرال حساب کنیم. حال می‌توان کد این رابطه را به صورت زیر نوشت.

کد ۱.۱ محاسبه حجم جسم حاصل از دوران

```
\def\@makechapterhead#1{%
  \vspace*{50\p@}%
  {\parindent \z@ \raggedright \normalfont
    \ifnum \c@secnumdepth >\m@ne
      \if@mainmatter
        \huge\bfseries \@chapapp\space \thechapter
        \par\nobreak
        \vskip 20\p@
      \fi
    \fi
   \interlinepenalty\@M
  \Huge \bfseries #1\par\nobreak
 \vskip 40\p@
}}
```

۲.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور yها

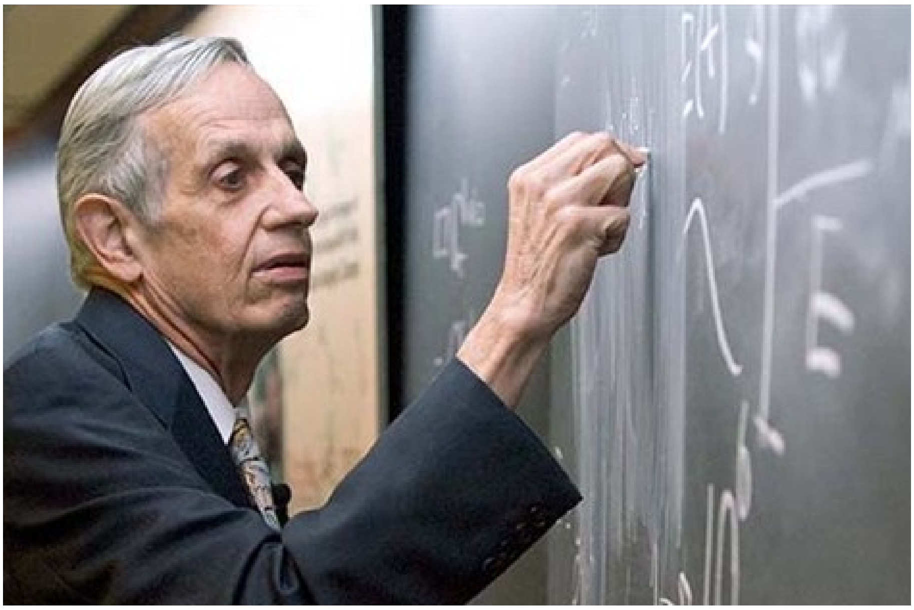
حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$، $c \leq y \leq d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^۲ dy \qquad (۸.۱)$$

حال اگر بتوانیم فرمولی برای طول مسیر ایجاد شده بیابیم، آنگاه فرمولی برای تقریب طول منحنی AB نیز خواهیم داشت.

مثال ۱.۵.۱. مساحت ناحیه‌ای در ربع اول که از بالا به $y = \sqrt{x}$ و از پایین به محور xها و خط $y = x - ۲$ محدود است را بیابید.

حل. ابتدا نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل بالا، مرز سمت راستی ناحیه، خط $x = y + ۲$ است. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ لذا $f(y) = y + ۲$ است و مرز $y = -۱$ و $y = ۲$ است. حال چون، مقدار $y = -۱$، یک نقطهٔ تقاطع پایین محور xها را به دست می‌دهد، لذا قابل قبول نیست. بنابراین فقط مقدار $y = ۲$ قابل قبول بوده و لذا $b = ۲$ است.



شکل ۸.۱ جان نش در حال تدریس

حال از رابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy &= \int_{۰}^{۲} [۲ + y - y^{۲}]dy \\
&= \left[۲y + \frac{y^{۲}}{۲} - \frac{y^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۲} \\
&= \frac{۱۰}{۳}.
\end{aligned}
$$

بنابراین $A = ۱۰/۳$ است. ■

هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^{۲} - [r(x)]^{۲})\, dx \tag{۹.۱}$$

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است.

همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجهٔ به دست آمده، با نتیجهٔ مثال قبل یکسان است و با مقدار محاسبات کمتری به دست آمده است. همچنین دقت شود که در این مثال، چون نسبت به y انتگرال گرفته‌ایم، تنها یک انتگرال‌گیری لازم است.

تمرین‌ها

۱.۱ اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، مشتق آن‌را حساب کنید.

۲.۱ نشان دهید مقدار

$$\int_۰^۱ \sqrt{۱ + \cos x} dx$$

نمی‌تواند ۲ باشد.

۳.۱ از نامساوی $\cos x \geq (۱ - x^۲/۲)$ که برای هر xی برقرار است، استفاده کنید و یک کران پایین برای مقدار $\int_۰^۱ \cos x dx$ پیدا کنید.

۴.۱ مشتق تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ را در نقطهٔ $x = ۲$ حساب کنید.

۵.۱ اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، تعیین کنید که f در کجا مشتق‌پذیر است؟

۶.۱ متحرکی روی نمودار $y = \sqrt{x - ۲}$ با فرض $x \geq ۲$ حرکت می‌کند. اگر مؤلفهٔ x آن با آهنگ ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد، در لحظه‌ای که $x = ۶$ است، آهنگ تغییر مؤلفه y آن برابر چیست؟ آیا متحرک در حال صعود است یا نزول؟

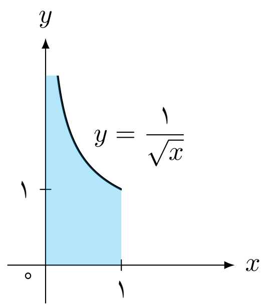
۷.۱ مشتق تابع $y = (\sqrt{x} + ۱)(\sqrt{x} - ۱)(x + ۱)$ را حساب کنید.

۸.۱ مشتق

$$f(x) = \frac{(x - ۱)(x^۲ - ۲x)}{x^۴}$$

را حساب کنید.

۹.۱ طول منحنی زیر را چطور می‌توان محاسبه کرد؟



۱۰.۱ اگر $f(x)$ تابعی باشد به طوری که $f(۴) = -۳$ و $f'(۴) = -۵$ و g تابعی باشد به طوری که $g(x) = f(x)/x$ باشد، $g'(۴)$ را به دست آورید.

۱۱.۱ اگر تابع f به صورت

$$y = \sin x - ۲\cos x \qquad (۱۰.۱)$$

داده شده باشد، رابطه‌ای بین y و y' بیابید که به x بستگی نداشته باشد.

۱۲.۱ مشتق تابع $y = \sqrt{x^۲ + ۱}$ را حساب کنید.

۱۳.۱ اگر

$$\lim_{h\to o} \frac{f(۳+h) - f(۳)}{h} = -۱$$

باشد، مشتق $y = f(x^۴ + x + ۱)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ حساب کنید.

۱۴.۱ اگر

$$f(\sin x - \cos x) = \sqrt{۲}g(۲x - \frac{\pi}{۴})$$

و $g'(\frac{\pi}{۴}) = ۴$ باشد، $f'(۰)$ را حساب کنید.

۱۵.۱ در معادلهٔ زیر، dy/dx را به دست آورید.

$$۲y = x^۲ + \sin y.$$

۱۶.۱ مشتق معادلهٔ پارامتری

$$x = ۳t^۴ + t^۲ - ۵, \quad y = ۶t^۲ - t$$

را به دست آورید.

۱۷.۱ فرض کنید f و g توابع حقیقی و مشتق‌پذیر باشند و $f(\circ) = g(\circ) = \circ$ و $g'(x) \neq \circ$ باشد. ثابت کنید

$$\lim_{x\to\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\circ)}{g'(\circ)}.$$

۱۸.۱ مشتق تابع $y = \text{Arcsin}\, x$ را به دست آورید.

۱۹.۱ شتق تابع $y = \text{Arctan}\, x$ را به دست آورید.

۲۰.۱ معادلهٔ خط مماس بر منحنی

$$y = \text{Arcsin}\, \frac{x-۱}{x+۲}$$

را در نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها را بنویسید.

۲۱.۱ در تابع

$$f(x) = \frac{۵x+۱}{x-۱},$$

مقدار $(f^{-۱})'(۱۱)$ را به دست آورید.

۲۲.۱ در تابع

$$y = \sqrt{\frac{۱}{\cos ۲x}},$$

رابطه‌ای بین y، y' و y'' بیابید که مستقل از x باشد.

۲۳.۱ در تابع

$$y = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}},$$

رابطه‌ای بین y، y' و y'' بیابید که مستقل از x باشد.

۲

کاربرد انتگرال در محاسبه حجم

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. شعر انواع مختلفی دارد که از آن جمله می‌توان به کلاسیک، مذهبی و عاشقانه اشاره کرد. شعر عاشقانه فارسی نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. در اینجا چند واژه تخصصی مثل منحنی، معادله خطی، عملگر، تبدیل کلی، چندجمله‌ای مشخصه و موهومی، نگاشت، مارپیچ و آونگ ایده‌آل نیز داریم. در فصل‌های بعدی نیز با نگاشت بی‌نقص، نمودار، نامساوی، پایداری، همگرایی، زاویه حاده، نماد جمعی، خط‌های ناموازی، مارپیچ، صعود، فلش، مخروط، مجانبی، گشتاور، گونیا و کمان آشنا می‌شویم.

۱.۲ قواعد انتگرال‌گیری نامعین

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^۲ \, dx \qquad (۱.۲)$$

مثال ۱.۱.۲. ناحیهٔ بین منحنی $y = \sqrt{x}$، $۰ \leq x \leq ۴$ و محور xها، برای تولید جسمی، حول

محور xها دوران داده می‌شود. حجم آن‌را را پیدا کنید.

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$، $c \le y \le d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^2 \, dy \qquad (۲.۲)$$

۲.۲ تکنیک‌های انتگرال‌گیری

۱.۲.۲ انتگرال‌گیری جزء به جزء

انتگرال‌گیری جزء به جزء یکی از تکنیک‌هایی است که برای ساده کردن انتگرال‌هایی به فرم

$$\int f(x)g(x)dx \qquad (۳.۲)$$

به کار می‌رود؛ به شرطی که در آن، از f بتوان بارها مشتق گرفت و از g نیز بتوان به سادگی، انتگرال گرفت. انتگرال

$$\int xe^x dx,$$

یک نمونه از چنین انتگرالی است؛ زیرا از $f(x) = x$ می‌توان دو بار مشتق گرفت تا صفر شود و از $g(x) = e^x$ نیز می‌توان به سادگی، بارها انتگرال گرفت. انتگرال‌گیری جزء به جزء، همچنین برای انتگرال‌هایی مانند

$$\int e^x \sin x dx$$

که در آن‌ها، هر قسمت از انتگرالده بعد از مشتق‌گیری و یا انتگرال‌گیری مکرر، دوباره تکرار می‌شوند، نیز به کار می‌رود.

۲.۲.۲ جانشینی ساده‌کننده

گوییم تابع $F(x)$ یک ضدمشتق تابع $f(x)$ است، هر گاه برای هر x در دامنهٔ f داشته باشیم

$$F'(x) = f(x).$$

مجموعهٔ تمام ضدمشتق‌های f، انتگرال نامعین f نسبت به x نامیده شده و با علامت

$$\int f(x)dx$$

نشان داده می‌شود.

۳.۲.۲ کسرهای جزیی

طبق قضیهٔ مقدار میانگین، می‌دانیم توابعِ با مشتق یکسان، در یک عدد ثابت با یکدیگر اختلاف دارند. به عبارت دیگر، اگر دو تابع f و g، مشتق یکسانی داشته باشند، آنگاه $f(x) = g(x) + C$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند. می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند. این حالت را در انتگرال‌گیری با

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

نشان می‌دهیم.

۳.۲ ظاهر شدن انتگرال اصلی در فرایند انتگرال‌گیری

در این بخش چند حکم را با هم مرور می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲. *مقدار $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + \cos x}dx$ نمی‌تواند ۲ باشد.*

برهان به دلیل سادگی برهان، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

گزاره ۲.۳.۲. *مقدار $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + \cos x}dx$ نمی‌تواند ۲ باشد.*

نتیجه ۳.۳.۲. *مقدار $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + \cos x}dx$ نمی‌تواند ۲ باشد.*

ملاحظه ۴.۳.۲. *مقدار $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + \cos x}dx$ نمی‌تواند ۲ باشد.*

اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، مشتق آن‌را حساب کنید. اگر x عددی در دامنهٔ f باشد، با استفاده از مطالب قبلی داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۳(x+\Delta x)^۲ + ۱۲ - (۳x^۲ + ۱۲)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۳x^۲ + ۶x\Delta x + ۳(\Delta x)^۲ + ۱۲ - ۳x^۲ - ۱۲}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۶x\Delta x + ۳(\Delta x)^۲}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰} ۶x + ۳(\Delta x) \\ &= ۶x \end{aligned}$$

و لذا مشتق تابع f به دست می‌آید. اگر $x_۱$ عدد خاصی از دامنهٔ f باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f'(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \tag{۴.۲}$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطهٔ (۴.۲) برای محاسبهٔ مشتق تابع f در یک نقطهٔ خاص مانند $x_۱$ استفاده می‌شود.

اگر در رابطهٔ (۴.۲) قرار دهیم $x = x_۱ + \Delta x$، آنگاه عبارت «$\Delta x \to ۰$» معادل «$x \to x_۱$» است. بنابراین با توجه به فرمول (۴.۱) می‌توان نوشت

$$f'(x_۱) = \lim_{x \to x_۱} \frac{f(x) - f(x_۱)}{x - x_۱} \tag{۵.۲}$$

مشتق تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ را در نقطهٔ $x = ۲$ حساب کنید.

و لذا مشتق تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ به دست می‌آید. تابع f را در $x_۱$ مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، تعیین کنید که f در کجا مشتق‌پذیر است؟ از آنجایی که $f'(x) = ۶x$ و $۶x$ برای تمام اعداد حقیقی موجود است، لذا

نتیجه می‌شود که f در همه جا مشتق‌پذیر است. اگر تابع f در $x_۱$ تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در $x_۱$ با $f'_+(x_۱)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰^+} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \tag{۶.۲}$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_+(x_۱) = \lim_{x \to x_۱^+} \frac{f(x) - f(x_۱)}{x - x_۱} \tag{۷.۲}$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. اگر تابع f در $x_۱$ تعریف شده باشد، آنگاه مشتق چپ f در $x_۱$ با $f'_-(x_۱)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_-(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \tag{۸.۲}$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_-(x_۱) = \lim_{x \to x_۱^-} \frac{f(x) - f(x_۱)}{x - x_۱} \tag{۹.۲}$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. فرض کنید تابع f به صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۳ \\ ۸ - x & ۳ \leq x \end{cases}$$

تعریف شده است. پیوستگی و مشتق‌پذیری این تابع را در نقطهٔ $x = ۳$ بررسی کنید. برای بررسی پیوستگی، سه شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. (۱) داریم $f(۳) = ۵$. بنابراین شرط اول که همان موجود بودن $f(۳)$ است، برقرار است. (۲) برای بررسی شرط دوم داریم

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = \lim_{x \to ۳^-} (۲x - ۱) = ۵$$

و

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \lim_{x \to ۳^+} (۸ - x) = ۵.$$

بنابراین $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۵$ و لذا شرط دوم هم برقرار است. (۳) $\lim_{x\to ۳} f(x) = f(۳)$.
بنابراین f در ۳ پیوسته است. حال مشتق‌پذیری f را در ۳ بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} f'_-(۳) &= \lim_{\Delta x\to ۰^-} \frac{f(۳+\Delta x)-f(۳)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰^-} \frac{(۲(۳+\Delta x)-۱)-۵}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰^-} \frac{۶+۲\Delta x-۶}{\Delta x} \\ &= ۲. \end{aligned}$$

۴.۲ سه جانشینی بنیادی

تابع f را در $x_۱$ مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.

جان اسمیت در کتابش می‌نویسد:

> طبق قضیهٔ مقدار میانگین، می‌دانیم توابعِ با مشتق یکسان، در یک عدد ثابت با یکدیگر اختلاف دارند. به عبارت دیگر، اگر دو تابع f و g، مشتق یکسانی داشته باشند، آنگاه $f(x) = g(x)+C$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند.

فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی $y=f(x)$ را از $x=a$ تا $x=b$ پیدا کنیم. طبق معمول، بازهٔ $[a,b]$ را افراز می‌کنیم و نقاط متناظر روی منحنی را با قطعه‌خط‌هایی به همدیگر وصل می‌کنیم تا یک مسیر چندضلعی تشکیل شود.

تمرین‌ها

۱.۲ اگر

$$\lim_{h\to o} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = -۱$$

باشد، مشتق $y=f(x^۴+x+۱)$ را در نقطهٔ $x=۱$ حساب کنید.

۲.۲ اگر

$$f(\sin x - \cos x) = \sqrt{۲}g(۲x - \frac{\pi}{۴})$$

و $g'(\frac{\pi}{۴}) = ۴$ باشد، $f'(۰)$ را حساب کنید.

۳.۲ در معادلهٔ زیر، dy/dx را به دست آورید.

$$۲y = x^۲ + \sin y.$$

۴.۲ مشتق معادلهٔ پارامتری

$$x = ۳t^۴ + t^۲ - ۵, \quad y = ۶t^۲ - t$$

را به دست آورید.

۵.۲ فرض کنید f و g توابع حقیقی و مشتق‌پذیر باشند و $f(۰) = g(۰) = ۰$ و $g'(x) \neq ۰$ باشد. ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(۰)}{g'(۰)}.$$

پیوست آ
چند یادآوری اساسی

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم.

آ.۱ استقرای ریاضی و چند مثال

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع، حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام‌یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. بنابراین در هر مساله، باید ابتدا ناحیه مورد نظر را رسم کرده و سپس با توجه به آن، بهترین روش را انتخاب کنیم.

آ.۲ مشتق‌های جزئی

تابع f را در $x_۱$ مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد. اگر فرض کنیم $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، مشتق آن‌را حساب کنید. اگر x عددی در دامنهٔ f باشد، با استفاده از مطالب قبلی داریم

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۳(x+\Delta x)^۲ + ۱۲ - (۳x^۲ + ۱۲)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۳x^۲ + ۶x\Delta x + ۳(\Delta x)^۲ + ۱۲ - ۳x^۲ - ۱۲}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۶x\Delta x + ۳(\Delta x)^۲}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰} ۶x + ۳(\Delta x) \\
&= ۶x
\end{aligned}$$

و لذا مشتق تابع f به دست می‌آید.

آ.۳ بسط تیلور

ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم. حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^۲ \, dx \qquad (آ.۱)$$

مثال آ.۳.۱. ناحیهٔ بین منحنی $y = \sqrt{x}$، $۰ \leq x \leq ۴$ و محور xها، برای تولید جسمی، حول

محور xها دوران داده می‌شود. حجم آنرا را پیدا کنید.

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a, b]$ باشد. این بازه را به n زیربازه با انتخاب $n - ۱$ نقطه مانند $x_۱$، $x_۲$، …، $x_{n-۱}$ بین a و b تقسیم می‌کنیم. حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$، $c \leq y \leq d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^۲ \, dy \qquad (\text{آ.۲})$$

آ.۴ مختصات قطبی

اگر در رابطهٔ (آ.۲) قرار دهیم $x = x_۱ + \Delta x$، آنگاه عبارت «$\Delta x \to ۰$» معادل «$x \to x_۱$» است. بنابراین با توجه به فرمول (آ.۲) می‌توان نوشت

$$f'(x_۱) = \lim_{x \to x_۱} \frac{f(x) - f(x_۱)}{x - x_۱} \qquad (\text{آ.۳})$$

مشتق تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ را در نقطهٔ $x = ۲$ حساب کنید. لذا مشتق تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ به دست می‌آید.

قضیه آ.۴.۱ طبق قضیهٔ مقدار میانگین، می‌دانیم توابعِ با مشتق یکسان، در یک عدد ثابت با یکدیگر اختلاف دارند. به عبارت دیگر، اگر دو تابع f و g، مشتق یکسانی داشته باشند، آنگاه $f(x) = g(x) + C$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند. می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند. این حالت را در انتگرال‌گیری با

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

نشان می‌دهیم. وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود،

نقاط تقاطع، حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام‌یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. بنابراین در هر مساله، باید ابتدا ناحیه مورد نظر را رسم کرده و سپس با توجه به آن، بهترین روش را انتخاب کنیم.

تابع f را در x_1 مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_1)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(x) = 3x^2 + 12$ باشد، تعیین کنید که f در کجا مشتق‌پذیر است؟ از آنجایی که $f'(x) = 6x$ و $6x$ برای تمام اعداد حقیقی موجود است، لذا نتیجه می‌شود که f در همه جا مشتق‌پذیر است. اگر تابع f در x_1 تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در x_1 با $f'_+(x_1)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (آ.۴)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \qquad (آ.۵)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. اگر تابع f در x_1 تعریف شده باشد، آنگاه مشتق چپ f در x_1 با $f'_-(x_1)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (آ.۶)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \qquad (آ.۷)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند.

آ.۵ بردارها در فضا و خواص آن‌ها

در این بخش چند حکم را با هم مرور می‌کنیم. مقدار $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ + \cos x}dx$ نمی‌تواند ۲ باشد. به دلیل سادگی برهان، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

اگر $f(x) = ۳x^{۲} + ۱۲$ باشد، مشتق آن‌را حساب کنید. اگر $x_{۱}$ عدد خاصی از دامنهٔ f باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f'(x_{۱}) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_{۱} + \Delta x) - f(x_{۱})}{\Delta x} \tag{آ.۸}$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطهٔ (آ.۸) برای محاسبهٔ مشتق تابع f در یک نقطهٔ خاص مانند $x_{۱}$ استفاده می‌شود.

فرض کنید تابع f به صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۳ \\ ۸ - x & ۳ \leq x \end{cases}$$

تعریف شده است. پیوستگی و مشتق‌پذیری این تابع را در نقطهٔ $x = ۳$ بررسی کنید. برای بررسی پیوستگی، سه شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. (۱) داریم $f(۳) = ۵$. بنابراین شرط اول که همان موجود بودن $f(۳)$ است، برقرار است. (۲) برای بررسی شرط دوم داریم

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = \lim_{x \to ۳^-} (۲x - ۱) = ۵$$

و

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \lim_{x \to ۳^+} (۸ - x) = ۵.$$

بنابراین $\lim_{x \to ۳} f(x) = ۵$ و لذا شرط دوم هم برقرار است. (۳) $\lim_{x \to ۳} f(x) = f(۳)$. بنابراین f در ۳ پیوسته است. حال مشتق‌پذیری f را در ۳ بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} f'_{-}(۳) &= \lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۳ + \Delta x) - f(۳)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{(۲(۳ + \Delta x) - ۱) - ۵}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{۶ + ۲\Delta x - ۶}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{۲\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to ۰^-} ۲ \\
&= ۲.
\end{aligned}
$$

آ.۶ ضرب برداری

تابع f را در $x_۱$ مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند. می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق F برای تابع f پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر f در یک ثابت، با F تفاوت دارند. این حالت را در انتگرال‌گیری با

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

نشان می‌دهیم.

کد آ.۱ روش به دست آوردن انتگرال نامعین

```
\newcommand{\@tufte@lof@line}[2]{%
  \leftskip 0.0em
  \rightskip 0em
  \parfillskip 0em plus 1fil
  \parindent 0.0em
  \@afterindenttrue
  \interlinepenalty\@M
  \leavevmode
  \@tempdima 2.0em
  \advance\leftskip\@tempdima
  \null\nobreak\hskip -\leftskip
  {#1}\nobreak\qquad\nobreak#2%
  \par%
}
```

پاسخ تمرین‌های برگزیده

فصل ۱

۱.۱ $6x$

۳.۱ ۲

۴.۱ با مشتق‌گیری داریم $f'(2) = 6(2) = 12$

۵.۱ تابع f در همه جا مشتق‌پذیر است.

۶.۱ -6. نزول می‌کند.

۷.۱ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$y = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

بنابراین $y' = 2x$.

۱۰.۱ $1/2$

۱۳.۱ بعد از ساده کردن عبارت، نتیجه می‌شود $y' = 3$.

۱۴.۱ با استفاده از مطالب گفته‌شده نتیجه می‌شود $f'(۰) = -۲$

۱۵.۱ $dy/dx = ۳xy - ۲y$

۱۶.۱ $x'(t) = ۱۲t^۳ + ۲t$ و $y'(t) = ۱۲t - ۱$.

۲۰.۱ $y = ۲x - ۶$

۲۱.۱ با استفاده از تعریف مشتق تابع وارون، می‌توان نوشت $(f^{-۱})'(۱۱) = -۳$

۲۲.۱ $۲y^۲ = y''y - ۳y'^۲$

۲۳.۱ $y^۴ + y''y - ۳y'^۲ = ۰$.

فصل ۲

۱.۲ $۶x$

۲.۲ با استفاده از مطالب گفته‌شده و نیز تعریف مشتق نتیجه می‌شود ۲

۳.۲ با مشتق‌گیری داریم $f'(۲) = ۶(۲) = ۱۲$

۴.۲ تابع f در همه جا مشتق‌پذیر است.

۵.۲ -۶ نزول می‌کند.

منابع

[۱] خیری، حسین، دامن‌افشان، وحید، مقدم، مهسا، و وفائی، وجیهه. *نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی*، ویرایش اول. انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ۱۳۹۰.

[2] Aliprantis, C., and Border, K. *Infinite Dimensional Analysis*, 3rd ed. . Springer–Verlag, Berlin, Germany, 2006.

[3] Folland, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed. . Wiley, Inc., USA, 1999.

[4] Thomas, G., and Finney, R. *Calculus and Analytic Geometry*, 9th ed. . Addison-Wesley, Inc., USA, 1996.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آونگ .... Pendulum

ایده‌آل .... Ideal

پ

پایداری .... Stability

ت

تبدیل .... Transform

کلی .... Global

چ

چندجمله‌ای .... Polynomial

مشخصه .... Characteristic

موهومی .... Imaginary

ز

زاویه .... Angle

حاده .... Acute

ش

شعر .... Poem

عاشقانه .... Romantic

فارسی .... Persian

کلاسیک .... Classic

مذهبی .... Religious

ص

صعود .... Ascension

ع

عملگر .... Operator

ف

فلش .... Arrow

ک

کمان .... Bow

گ

گشتاور .... Moment

گونیا .... Bevel

م

مارپیچ .... Spiral

مجانبی .... Asymptotic

مخروط .... Cone

معادله .... Equation

  خطی .... Linear

منحنی .... Curve

ن

نامساوی .... Inequality

ناموازی .... Antiparallel

نگاشت .... Map

  بی‌نقص .... Perfect

نماد .... Notation

  جمعی .... Additive

نمودار .... Diagram

ه

همگرایی .... Convergence

نمایه

Calculus and Analytic Geometry

By

Vahid Damanafshan

Faculty Member Of The Kermanshah University

The Kermanshah University Press

2022