دانشگاه پیام نور

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

وحید دامن‌افشان

محل درج شناسنامه کتاب توسط ناشر

تقدیم به همه آن‌هایی که می‌خواهند بیشتر بدانند...

محل درج مقدمه ناشر

محل درج مقدمه ناشر

فهرست مطالب

پیشگفتار

با توجه به کاربرد و اهمیت روزافزون ریاضیات عمومی در کمک به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نیز نظر به اینکه کتاب‌های ریاضی‌ای که تاکنون به زبان فارسی در رابطه با موضوع ریاضیات عمومی ترجمه یا تالیف شده است، نیازهای فعلی جامعه ریاضی و علمی را برآورده نمی‌کند، تصمیم به تالیف کتاب حاضر گرفته شد.

سطح این کتاب به گونه‌ای است که برای دانشجویان سال اول دوره کارشناسی رشته ریاضی و دانشجویان کارشناسی رشته‌های فیزیک، مکانیک و سایر رشته‌های مرتبط قابل استفاده است.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات همومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین، با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب، به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

کتاب حاضر از شش فصل تشکیل شده است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه مورد بررسی قرار گرفته و نیز قضیه اساسی وجودی و منحصر بفردی جواب بیان شده است.

در فصل دوم، مباحث و مطالب فصل اول، روی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسیع داده شده است. همچنین در این فصل، سه روش مختلف برای حل سیستم معادلات ارایه شده است. لازم به ذکر است که روش حل سیستم معادلات با استفاده از روش جردن، بیشتر برای دوره‌های کارشناسی ارشد آورده شده است. لذا برای دوره‌های کارشناسی می‌توان از مطالعه این روش، چشم‌پوشی کرد. در ادامه فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه nام و قضیه‌های مربوط به آن، بررسی شده است.

فصل سوم در ارتباط با مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم است. در این فصل، قضیه‌های اساسی در ارتباط با مسایل مقدار مرزی، از جمله قضیه مقایسه‌ای و قضیه تفکیک آورده شده است.

در فصل چهارم، سیستم‌های دینامیکی معرفی شده است. تعاریف و مفاهیم نقاط ثابت، پایداری نقاط ثابت و تصویر فاز، با بیانی ساده و روان ارایه شده است.

فصل پنجم، درباره سیستم‌های دینامیکی خطی در صفحه بحث می‌کند. به بیان دقیق‌تر، سیستم‌های خطی متعارف و سیستم‌های خطی ساده در صفحه، بیان و تصاویر فاز مربوط به آن‌ها مورد کاوش قرار گرفته است.

فصل ششم درباره سیستم‌های غیرخطی در صفحه است. در واقع این فصل، دربرگیرنده مطالب تکمیلی فصل پنجم است. بیشتر مطالب این فصل، برای دوره‌های تحصیلات تکمیلی مناسب است.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات عمومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین، با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب، به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

وحید دامن‌افشان

کرمانشاه، تابستان ۱۴۰۰

فصل اول

مشتق و کاربرد آن در علوم مهندسی

هدف‌های کلی

آشنایی با مفهوم گزاره‌ها، سورها و چند روش اثبات احکام ریاضی.

هدف‌های یادگیری

از دانشجو انتظار می‌رود پس از مطالعه این فصل بتواند:

۱. مفهوم گزاره‌ها را توضیح دهد.

۲. دلیل گزاره‌بودن یا نبودن یک عبارت را توضیح دهد.

۳. رابط‌های گزاره‌ای را نام ببرد و تفاوت‌های آن‌ها با یکدیگر را ذکر کند.

۴. انواع گزاره‌ها را از یکدیگر تشخیص دهد.

۵. مفهوم استدلال استنتاجی را بیان کند.

۶. مفاهیم گزاره‌نما و سور را توضیح دهد.

۷. ارتباط بین گزاره و سور را درک کند.

۸. نقیض گزاره‌های سوردار را به دست آورد.

۹. روش‌های اثبات مستقیم، عکس نقیض، برهان خلف و استقرای ریاضی را یاد بگیرد و در مواقع لازم بتواند از آن‌ها استفاده کند.

مقدمه

این فصل درباره منطق مقدماتی در ریاضیات است. منطق، بررسی اصول و روش‌هایی است که برای تشخیص استدلال‌های درست از استدلال‌های نادرست به کار می‌روند. منظور از این فصل مقدماتی منطق این است که خواننده را با اصول و روش‌هایی که در هر مرحله از برهان قضیه‌های ریاضی به کار می‌رود، آشنا کنیم. برای این کار ابتدا مفهوم گزاره را بیان می‌کنیم؛ سپس رابطه‌های گزاره‌ای را شرح می‌دهیم و با انواع گزاره آشنا می‌شویم. بعد از آن با آوردن قضیه‌ها و مثال‌های گوناگون، به‌طور عمیق به بررسی روابط بین گزاره‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه فصل را با معرفی چند روش اثبات قضیه‌های ریاضی به پایان می‌بریم. اهمیت این فصل به حدی است که پایه و اساس چند فصل بعدی کتاب خواهد بود؛ لذا پیشنهاد می‌شود که خواننده این فصل را با دقت فراوان مطالعه کند.

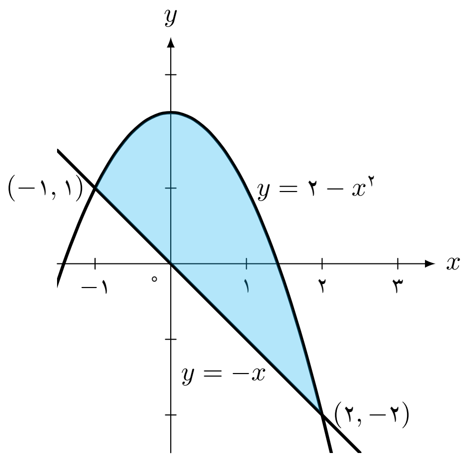
مشتق به طور گسترده در علوم پایه، اقتصاد، پزشکی و علوم کامپیوتر برای محاسبه سرعت اولیه و شتاب و به به منظور توضیح رفتار ماشین‌آلات، تخمین میزان افت آب در هنگام پمپ شدن آب از تانکر آب و پیشگویی نتایج ایجاد خطا در اندازه‌گیری‌ها به کار می‌رود. پیدا کردن مشتق‌ها می‌تواند طولانی و سخت باشد. می‌توان گفت مشتق یکی از ارکان اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال محسوب می‌شود. در این فصل، تکنیک‌هایی برای محاسبه آسان‌تر و درک بهتر آن‌ها بیان می‌شود [۱].

۱-۱ یادآوری حدهای یک‌طرفه و کاربرد آن‌ها

در این بخش ابتدا حدهای یک‌طرفه را یادآوری کرده و بعد از آن، به بیان مفهوم مشتق می‌پردازیم. سپس روابط و قضایای مشتق‌گیری را بیان می‌کنیم. در تعریف $\lim_{x\to a} f(x)$، xهایی را در نظر می‌گیریم که در یک بازهٔ باز شامل a و نه خود a باشند؛ یعنی مقادیر x نزدیک به a را، چه بزرگ‌تر از a باشند و چه کوچک‌تر از آن باشند.

حال فرض کنید تابعی مانند $f(x) = \sqrt{x - ۴}$ داریم. چون برای $x < ۴$، مقدار $f(x)$ وجود ندارد، بنابراین f در هیچ بازهٔ باز شامل ۴ تعریف نشده است. لذا $\lim_{x\to ۴} \sqrt{x - ۴}$ بی‌معنی است. از آنجایی که استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری از توابع، کاری زمان‌بر است، در این بخش، قضایایی را مطرح می‌کنیم که با کمک آن‌ها بتوان مشتق توابع را به سادگی به دست آورد. شکل ۱-۱ را ببینید که در آن، ناحیهٔ محصور بین نمودار $y = ۲ - x^{۲}$ و خط

$y=-x$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱. ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y=۲-x^۲$ و خط $y=-x$

با وجود این، اگر x را فقط به مقادیر بزرگ‌تر از ۴ محدود کنیم، می‌توانیم مقدار $\sqrt{x-۴}$ را به اندازهٔ دلخواه به ۰ نزدیک کنیم؛ در چنین حالتی، x را از سمت راست به ۴ میل می‌دهیم و آن‌را حد یک‌طرفه از راست و یا حد راست می‌نامیم. بنابراین

$$\lim_{x\to ۴^+}\sqrt{x-۴}=۰.$$

حد چپ نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود.

اگر تابع f در $x_۱$ تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در $x_۱$ با $f'_+(x_۱)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_۱)=\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۱-۱)$$

و یا به عبارت دیگر، تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. در ادامه، چند قضیه و مثال بیان می‌شود تا خواننده بیشتر با مفاهیم حد و مشتق آشنا شود. برای بحث بیشتر می‌توان به کتاب‌های پیشرفته‌تر حساب دیفرانسیل مراجعه کرد.

قضیه ۱-۱ (وجود حد). *گوییم $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد و برابر L است، اگر و تنها اگر*

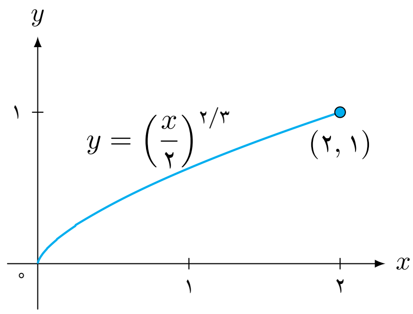
$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

هر دو موجود و برابر با L باشند.

مثال ۱-۱. فرض کنید تابع f مطابق شکل ۱-۲ و با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases}$$

تعریف شده است. آیا حد[۱] تابع f وجود دارد؟



شکل ۱-۲. نمودار تابع $y=(x/۲)^{۲/۳}$ در بازه $[۰,۲]$

حل. با توجه به تعریف تابع، اگر x عددی کوچک‌تر از ۰ باشد، $f(x)$ دارای مقدار ثابت ۱− است. لذا $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=-۱$. با استدلالی مشابه، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+۱.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)\neq \lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

و لذا حل مثال به پایان می‌رسد.

در معنی شناسی نمادین، برنامه‌ها و قطعه‌برنامه‌ها، به عنصرهایی از ساختارهای ریاضی مانند دامنه‌ها از دیدگاه اسکات[۲] نگاشته می‌شود. اگر سیستم مدل‌بندی شده توانایی ایجاد انتخاب‌های تصادفی (یا انتخاب‌های شبه تصادفی) را داشته باشد، آنگاه منطقی است که رفتار خود را به وسیله اندازه‌ای که احتمال را برای سیستم ثبت می‌کند، مدل‌بندی کند تا زیرمجموعه اندازه‌پذیری از مجموعه همه حالت‌های ممکن بشود. این ایده‌ها برای اولین بار توسط صاحب

[۱] در ادامه فرض می‌شود خواننده تا حدودی با مفاهیم پایه‌ای حد آشناست.

[2] Scott

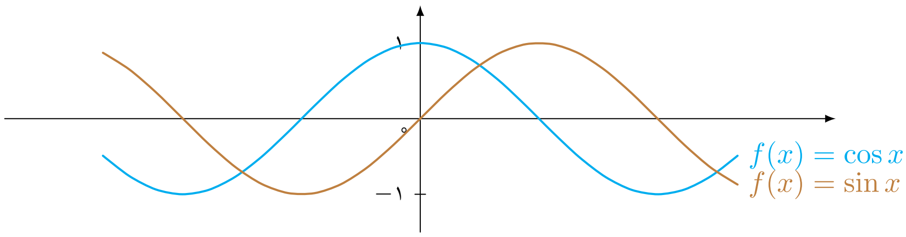
جهرمی[1] و کازن[2] مطرح شد. هنگامی که کازن با فضاهای اندازه مطلق کار می‌کرد، اندازه‌های (احتمال) در نظر گرفته شده قبلی، به وسیله مجموعه‌های اسکات_باز یک dcpo گسترش پیدا کرد.

این ارتباط بین محاسبه‌پذیری و توپولوژی، بطور بسیار واضح توسط اسمیت[3] شرح داده شده و بعدها توسط آبرامسکی[4]، ویکرز[5] و دیگران، بیشتر توسعه داده شد.

تعریف (۱) (مشتق تابع). مشتق تابع f، تابعی است که با علامت f' نشان داده می‌شود و مقدار آن در هر عدد x واقع در دامنهٔ f به صورت

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (۱-۲)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. شکل ۱-۳ را ببینید.



شکل ۱-۳. نمودار دو تابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

تمرین

۱. اگر $f(x) = 3x^2 + 12$ باشد، مشتق آنرا حساب کنید.

۲. نشان دهید مقدار

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$$

نمی‌تواند ۲ باشد.

[1] Saheb-Djahromi
[2] Kozen
[3] Smyth
[4] Abramsky
[5] Vickers

۳. از نامساوی $\cos x \geq (1 - x^2/2)$ که برای هر xی برقرار است، استفاده کنید و یک کران پایین برای مقدار $\int_0^1 \cos x dx$ پیدا کنید.

۴. مشتق تابع $f(x) = 3x^2 + 12$ را در نقطهٔ $x = 2$ حساب کنید.

۱-۲ انتگرال معین و نامعین و کاربرد آن در مهندسی

در این بخش، مفهوم انتگرال‌های معین و نامعین را توضیح داده و سپس خواص انتگرال معین بیان می‌شود. همچنین بعضی از کاربردهای انتگرال معین توضیح داده می‌شود. بعد از آن، نوبت به انتگرال‌های نامعین می‌رسد و روش‌های انتگرال‌گیری برای این نوع انتگرال‌ها شرح داده می‌شود. از این روش‌ها بعدها در درس معادلات دیفرانسیل نیز استفاده می‌شود.

۱-۲-۱ انتگرال معین

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a, b]$ باشد. این بازه را به n زیربازه با انتخاب $n - 1$ نقطه مانند x_1، x_2، ...، x_{n-1} بین a و b تقسیم می‌کنیم به شرطی که

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

برای ایجاد یکنواختی، a را با x_0 و b را با x_n نشان می‌دهیم. شکل ۱-۴ را ببینید.

قضیه ۱-۲ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌های معین). *اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه یک cای در بازهٔ $[a, b]$ وجود دارد به طوری که*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

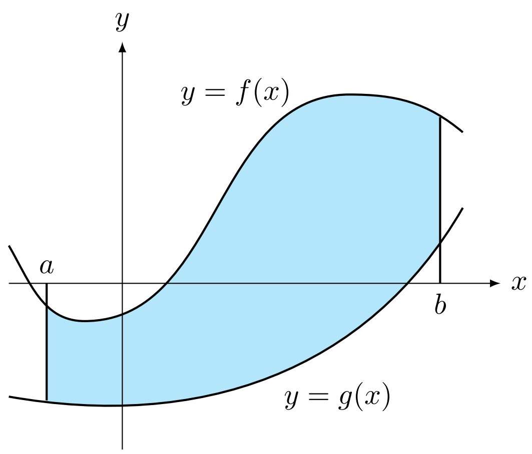
ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم.

اگر f و g توابع پیوسته‌ای روی بازهٔ $[a, b]$ و با شرط $f(x) \geq g(x)$ باشند، آنگاه مساحت ناحیهٔ بین منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از a تا b برابر است با

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \tag{۱-۳}$$

۱-۲-۲ منحنی‌های قاطع یکدیگر

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع،



شکل ۱-۴. ناحیه محصورشده بین دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$

حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند [۴]. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. در فصل بعدی باز هم نمونه‌های دیگری را بررسی خواهیم کرد که باعث فهم بیشتر مبحث خواهد شد.

با توجه به شکل، طول قطعه‌خط خاص PQ برابر L است. بنابراین طول منحنی به وسیلهٔ جمع

$$\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^۲+(\Delta y_k)^۲}$$

تقریب زده می‌شود.

ملاحظه ۱-۱. *اگر $x_۱$ عدد خاصی از دامنهٔ f باشد، آنگاه می‌توان نوشت*

$$f'(x_۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۱-۴)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطهٔ (۴-۲) برای محاسبهٔ مشتق تابع f در یک نقطهٔ خاص مانند $x_۱$ استفاده می‌شود.

اگر در رابطهٔ (۴-۲) قرار دهیم $x=x_۱+\Delta x$، آنگاه عبارت «$\Delta x\to ۰$» معادل «$x\to x_۱$» است. بنابراین با توجه به فرمول (۴-۲) می‌توان نوشت

$$f'(x_۱)=\lim_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱}$$

تابع f را در $x_۱$ مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۱-۲. مساحت ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا نمودار هر دو منحنی را رسم می‌کنیم (شکل ۲-۵). طبق رابطهٔ (۲-۳)، قرار می‌دهیم $f(x) = ۲ - x^۲$ و $g(x) = -x$. حال برای پیدا کردن حدود انتگرال‌گیری، معادلهٔ $۲ - x^۲ = -x$ را حل می‌کنیم. بنابراین $x^۲ - x - ۲ = ۰$. لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_{-۱}^{۲} (۲ + x - x^۲)dx \\ &= \left[۲x + \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}\right]_{-۱}^{۲} \\ &= \left(۴ + \frac{۴}{۲} - \frac{۸}{۳}\right) - \left(-۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) \end{aligned}$$

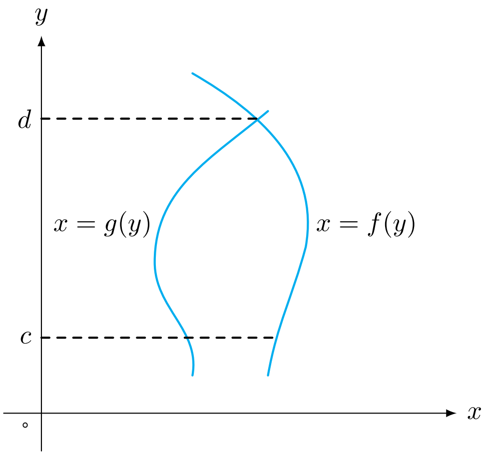
که کار را تمام می‌کند.

این ایده‌ها برای اولین بار توسط صاحب جهرمی[۱] و کازن[۲] مطرح شد. هنگامی که کازن با فضاهای اندازه مطلق کار می‌کرد، اندازه‌های (احتمال) در نظر گرفته شده قبلی، به وسیله مجموعه‌های اسکات‌ـ‌باز یک dcpo گسترش پیدا کرد.

این ارتباط بین محاسبه‌پذیری و توپولوژی، بطور بسیار واضح توسط اسمیت[۳] شرح داده شده و بعدها توسط آبرامسکی[۴]، ویکرز[۵] و دیگران، بیشتر توسعه داده شد.

روش گفته شده در بالا، روش دیسک (شکل ۲-۵) نام دارد. روش دیگری نیز برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران وجود دارد که به روش واشر، معروف شده است . در ادامه بیشتر با این روش آشنا خواهیم شد [۲].

[1] Saheb-Djahromi
[2] Lepoldo Smith Kozen
[3] George Smyth
[4] Abramsky
[5] John Vickers



شکل ۱-۵. نمودار منحنی‌های $x = g(y)$ و $x = f(y)$ در بازه $[c, d]$

تعریف (۲) (روش واشر). هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^{۲} - [r(x)]^{۲})\, dx \qquad (۱-۵)$$

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است.

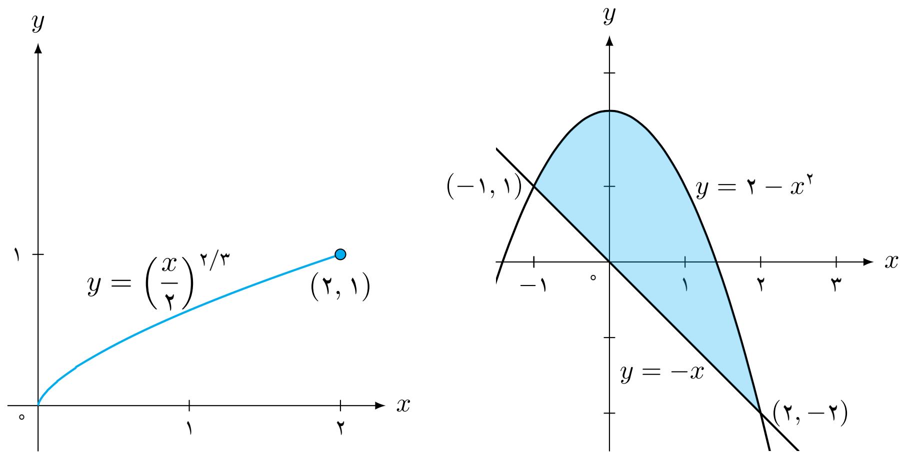
دقت داشته باشید که در فرمول (۲-۹) اگر $r(x)$ در سراسر بازهٔ $[a, b]$ صفر باشد، همان فرمول روش دیسک، نتیجه می‌شود. بنابراین روش دیسک، حالت خاصی از روش واشر است.

سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام‌یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید.

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^{۲} - [r(y)]^{۲})\, dy + \int_{\circ}^{۱} \pi\left(\left[\frac{۳}{۲} - \sqrt{y}\right]^{۲}\right) dy.$$

تمرین

۱. اگر $f(x) = ۳x^{۲} + ۱۲$ باشد، تعیین کنید که f در کجا مشتق‌پذیر است؟



(آ) ناحیهٔ محصور توسط $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ (ب) نمودار تابع $y = (x/۲)^{۲/۳}$ در بازه I

شکل ۱-۶. نمودار تعریف (۲) در حالت متقارن

۲. متحرکی روی نمودار $y = \sqrt{x - ۲}$ با فرض $x \geq ۲$ حرکت می‌کند. اگر مؤلفهٔ x آن با آهنگ ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد، در لحظه‌ای که $x = ۶$ است، آهنگ تغییر مؤلفه y آن برابر چیست؟ آیا متحرک در حال صعود است یا نزول؟

۳. مشتق تابع $y = (\sqrt{x} + ۱)(\sqrt{x} - ۱)(x + ۱)$ را حساب کنید.

۴. مشتق

$$f(x) = \frac{(x - ۱)(x^۲ - ۲x)}{x^۴}$$

را حساب کنید.

۵. طول منحنی مثال قبل را چطور می‌توان محاسبه کرد؟

۱-۳ محاسبهٔ طول منحنی‌ها با روشی ابتکاری

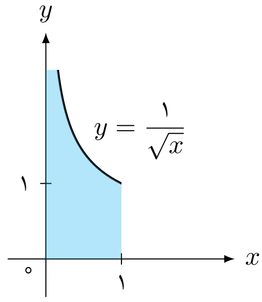
فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی $y = f(x)$ را از $x = a$ تا $x = b$ پیدا کنیم. طبق معمول، بازهٔ $[a, b]$ را افراز می‌کنیم و نقاط متناظر روی منحنی را با قطعه‌خط‌هایی به همدیگر وصل می‌کنیم تا یک مسیر چندضلعی تشکیل شود (شکل ۱-۷).

تعریف (۳). اگر f روی بازهٔ $[a, b]$ هموار باشد، طول منحنی $y = f(x)$ از a تا b برابر است

با

$$L = \int_a^b \sqrt{۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\, dx = \int_a^b \sqrt{۱ + (f'(x))^۲}\, dx. \qquad (۱-۶)$$

گاهی ممکن است dy/dx در یک نقطهٔ خاص از بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشد. در این حالت dx/dy را حساب می‌کنیم و x را بر حسب تابعی از y بیان می‌کنیم (شکل ۱-۷).



شکل ۱-۷. نمونه‌ای از تابعی با برد نامعین

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. شعر انواع مختلفی دارد که از آن جمله می‌توان به کلاسیک، مذهبی و عاشقانه اشاره کرد. شعر عاشقانه فارسی نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. در اینجا چند واژه تخصصی مثل منحنی، معادله خطی، عملگر، تبدیل کلی، چندجمله‌ای مشخصه و موهومی، نگاشت، مارپیچ و آونگ ایده‌آل نیز داریم. در فصل‌های بعدی نیز با نگاشت بی‌نقص، نمودار، نامساوی، پایداری، همگرایی، زاویه حاده، نماد جمعی، خط‌های ناموازی، مارپیچ، صعود، فلش، مخروط، مجانبی، گشتاور، گونیا و کمان آشنا می‌شویم.

تمرین

۱. اگر $f(x)$ تابعی باشد به طوری که $f(۴) = -۳$ و $f'(۴) = -۵$ و g تابعی باشد به طوری که $g(x) = f(x)/x$ باشد، $g'(۴)$ را به دست آورید.

۲. اگر تابع f به صورت

$$y = \sin x - ۲\cos x$$

داده شده باشد، رابطه‌ای بین y و y' بیابید که به x بستگی نداشته باشد.

۱-۴ انتگرال‌های ناسره

انتگرال‌های معینی که تا اینجا با آن‌ها سر و کار داشته‌ایم، دارای دو ویژگی بوده‌اند [۳]. یکی اینکه، دامنهٔ انتگرال‌گیری آن‌ها، یعنی a و b معین بود. دوم اینکه، برد انتگرالده روی این دامنه، معین بود. در این بخش یاد می‌گیریم که چگونه باید با این انتگرال‌ها برخورد کنیم (جدول ۲-۱).

مثال ۱-۳. همگرایی

$$\int_{۰}^{۳} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

را بررسی کنید.

حل. انتگرالده $f(x) = ۱/(x-۱)^{۲/۳}$ در $x = ۱$ نامتناهی می‌شود؛ اما روی $[۰, ۱)$ و $(۱, ۳]$ پیوسته است. همگرایی انتگرال روی $[۰, ۳]$ به انتگرال‌های از ۰ تا ۱ و ۱ تا ۳ بستگی دارد. روی $[۰, ۱)$ داریم

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} &= \lim_{b \to ۱^-} \int_{۰}^{b} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} \\ &= \lim_{b \to ۱^-} [۳(b-۱)^{۱/۳} - ۳(۰-۱)^{۱/۳}] \\ &= ۳\end{aligned}$$

و لذا نتیجه به دست می‌آید.

مشتق به طور گسترده در علوم پایه، اقتصاد، پزشکی و علوم کامپیوتر برای محاسبه سرعت اولیه و شتاب و به به منظور توضیح رفتار ماشین‌آلات، تخمین میزان افت آب در هنگام پمپ شدن آب از تانکر آب و پیشگویی نتایج ایجاد خطا در اندازه‌گیری‌ها به کار می‌رود. پیدا کردن مشتق‌ها می‌تواند طولانی و سخت باشد. می‌توان گفت مشتق یکی از ارکان اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال محسوب می‌شود. در این فصل، تکنیک‌هایی برای محاسبه آسان‌تر و درک بهتر آن‌ها بیان می‌شود [۱].

تمرین

۱. مشتق تابع $y = \sqrt{x^{۲} + ۱}$ را حساب کنید.

۲. اگر

$$\lim_{h\to o}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=-۱$$

باشد، مشتق $y=f(x^۴+x+۱)$ را در نقطهٔ $x=۱$ حساب کنید.

۳. اگر

$$f(\sin x-\cos x)=\sqrt{۲}g(۲x-\frac{\pi}{۴})$$

و $g'(\frac{\pi}{۴})=۴$ باشد، $f'(\circ)$ را حساب کنید.

۴. در معادلهٔ زیر، dy/dx را به دست آورید.

$$۲y=x^۲+\sin y.$$

۵. مشتق معادلهٔ پارامتری

$$x=۳t^۴+t^۲-۵,\quad y=۶t^۲-t$$

را به دست آورید.

۶. فرض کنید f و g توابع حقیقی و مشتق‌پذیر باشند و $f(\circ)=g(\circ)=\circ$ و $g'(x)\neq\circ$ باشد. ثابت کنید

$$\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\circ)}{g'(\circ)}.$$

۷. مشتق تابع $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ را به دست آورید.

۸. شتق تابع $y=\mathrm{Arctan}\,x$ را به دست آورید.

۱-۵ محاسبهٔ حجم جسم‌های حاصل از دوران

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. در ادامه دربارهٔ حجم این نوع جسم‌ها بحث می‌کنیم.

جدول ۱-۱. نحوه عملکرد تابع f در ارتباط با پیوستگی

نام تابع	نقطه ناپیوستگی	نقطه بحرانی
تابع f	$x = 1$	$a^2 + 3$
تابع g	$x = -2$	$b - 4$
تابع h	$x = 0$	$a + b - 7$

۱-۵-۱ حجم حاصل از دوران حول محور xها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^2 \, dx \tag{۱-۷}$$

این ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم؛ اما اگر f و g توابع پیوستهٔ دلخواهی باشند، ناچاریم که مساحت مورد نظر را با استفاده از انتگرال حساب کنیم. گاهی ممکن است dy/dx در یک نقطهٔ خاص از بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشد. در این حالت dx/dy را حساب می‌کنیم. حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است. حال می‌توان کد این رابطه را به صورت زیر نوشت.

کد ۱-۱. محاسبه حجم جسم حاصل از دوران

```
\def\@makechapterhead#1{%
  \vspace*{50\p@}%
  {\parindent \z@ \raggedright \normalfont
    \ifnum \c@secnumdepth >\m@ne
      \if@mainmatter
        \huge\bfseries \@chapapp\space \thechapter
        \par\nobreak
        \vskip 20\p@
      \fi
    \fi
   \interlinepenalty\@M
  \Huge \bfseries #1\par\nobreak
 \vskip 40\p@
}}
```

۱-۵-۲ حجم حاصل از دوران حول محور yها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$، $c \leq y \leq d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^۲ dy \tag{۱-۸}$$

حال اگر بتوانیم فرمولی برای طول مسیر ایجاد شده بیابیم، آنگاه فرمولی برای تقریب طول منحنی AB نیز خواهیم داشت [۵].

مثال ۱-۴. مساحت ناحیه‌ای در ربع اول که از بالا به $y = \sqrt{x}$ و از پایین به محور xها و خط $y = x - ۲$ محدود است را بیابید.

حل. ابتدا نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل بالا، مرز سمت راستی ناحیه، خط $x = y + ۲$ است. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ لذا $f(y) = y + ۲$ است و مرز $y = -۱$ و $y = ۲$ است. حال چون، مقدار $y = -۱$، یک نقطهٔ تقاطع پایین محور xها را به دست می‌دهد، لذا قابل قبول نیست. بنابراین فقط مقدار $y = ۲$ قابل قبول بوده و لذا $b = ۲$ است.

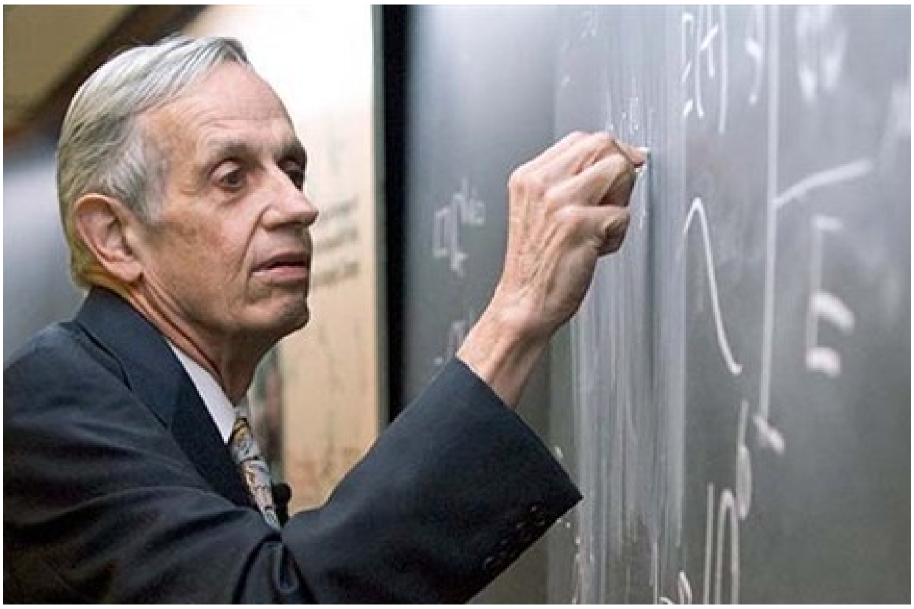
همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجهٔ به دست آمده، با نتیجهٔ مثال قبل یکسان است. حال از رابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجهٔ به دست آمده، با نتیجهٔ مثال قبل یکسان است

$$\begin{aligned} A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy &= \int_۰^۲ [۲ + y - y^۲]dy \\ &= \left[۲y + \frac{y^۲}{۲} - \frac{y^۳}{۳}\right]_۰^۲ \\ &= \frac{۱۰}{۳}. \end{aligned}$$

بنابراین $A = ۱۰/۳$ است.

هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^۲ - [r(x)]^۲)\ dx \tag{۱-۹}$$



شکل ۱–۸. جان نش در کلاس درس

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است [۶].

همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجهٔ به دست آمده، با نتیجهٔ مثال قبل یکسان است و با مقدار محاسبات کمتری به دست آمده است. همچنین دقت شود که در این مثال، چون نسبت به y انتگرال گرفته‌ایم، تنها یک انتگرال‌گیری لازم است.

تمرین

۱. معادلهٔ خط مماس بر منحنی

$$y = \operatorname{Arcsin} \frac{x-۱}{x+۲}$$

را در نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها را بنویسید.

۲. در تابع

$$f(x) = \frac{۵x+۱}{x-۱},$$

مقدار $(f^{-۱})'(۱۱)$ را به دست آورید.

۳. در تابع

$$y = \sqrt{\frac{۱}{\cos ۲x}},$$

رابطه‌ای بین y، y' و y'' بیابید که مستقل از x باشد.

۴. در تابع

$$y = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}},$$

رابطه‌ای بین y، y' و y'' بیابید که مستقل از x باشد.

خلاصه فصل

منطق، بررسی اصول و روش‌هایی است که برای تشخیص استدلال‌های درست از استدلال‌های نادرست به کار می‌روند. هر دانشجوی ریاضی‌ای باید با اصول و روش‌هایی که در هر مرحله از برهان قضیه‌های ریاضی به کار می‌رود، آشنا باشد. در این فصل با مفهوم گزاره و رابطه‌های گزاره‌ای و روابط بین آن‌ها آشنا شدیم. در ادامه فصل، بحث را به سمت روش‌های اثبات قضیه‌ها و احکام ریاضی بردیم. خواندن عمیق این مطالب برای درک بهتر مطالب فصل‌های بعدی بسیار مؤثر خواهد بود.

خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل اول

۱. کدام‌یک از گزاره‌های زیر یک گزاره درست‌گو است؟

الف) $(p \vee q) \wedge \sim q \longrightarrow q$ ب) $p \wedge q \longrightarrow p$

ج) $(p \wedge q) \vee \sim p \longrightarrow q$ د) $p \longrightarrow p \vee q$

۲. گزاره $p \longrightarrow q$ هم‌ارز کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

الف) $\sim p \longrightarrow q$ ب) $\sim q \longrightarrow \sim p$

ج) $\sim q \vee p$ د) $p \wedge q \longrightarrow q$

۳. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟

الف) $\forall x, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Longrightarrow \big(\forall x, P(x)\big) \vee \big(\forall x, Q(x)\big)$

ب) $\forall x, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Longleftarrow \big(\forall x, P(x)\big) \vee \big(\forall x, Q(x)\big)$

ج) $\exists x, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Longrightarrow \big(\exists x, P(x)\big) \vee \big(\exists x, Q(x)\big)$

د) $\exists x, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \big(\exists x, P(x)\big) \vee \big(\exists x, Q(x)\big)$

۴. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست‌گو است؟

الف) $\sim q \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$ ب) $p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow p$

ج) $\sim p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$ د) $p \vee (q \longrightarrow p) \Longrightarrow p$

۵. چند حالت منطقی برای گزاره $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$ وجود دارد؟

الف) ۴ ب) ۸ ج) ۱۶ د) ۳۲

۶. کدام‌یک از گزاره‌های زیر قانون انتزاع نیست؟

الف) $(p \longrightarrow q) \vee p \Longrightarrow q$ ب) $(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$

ج) $(p \longrightarrow q) \wedge q \Longrightarrow p$ د) $(p \longrightarrow q) \vee q \Longrightarrow p$

۷. گزاره $(\sim p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \longrightarrow r)$ بیانگر کدام‌یک از قانون‌های زیر است؟

الف) قانون پخش‌پذیری ب) قانون شرکت‌پذیری

ج) قانون تعدی د) قانون انتزاع

۸. گزاره $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ هم‌ارز منطقی کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

الف) $q \wedge p$ ب) $\sim q \wedge p$ ج) $\sim q \vee p$ د) $q \wedge \sim p$

۹. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت گزاره $\sim (p \longrightarrow \sim q)$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

الف) $p \wedge \sim q$ ب) $p \vee \sim q$ ج) $\sim p \wedge q$ د) $\sim p \vee q$

۱۰. کدام‌یک از گزاره‌های زیر برهان خلف نیست؟

الف) $(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$

ب) $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$

ج) $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim p) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]$

د) $(p \longrightarrow q) \wedge \sim p \Longrightarrow q$

فصل دوم

انتگرال معین و نامعین

هدف‌های کلی

آشنایی با مفهوم مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ها و اعمال روی آن‌ها.

هدف‌های یادگیری

از دانشجو انتظار می‌رود پس از مطالعه این فصل بتواند:

۱. مفهوم مجموعه و زیرمجموعه را بیان کند.

۲. مجموعه‌ها را با نماد مجموعه‌ساز نشان دهد.

۳. مجموعه توانی یک مجموعه را تشکیل دهد.

۴. اجتماع و اشتراک دو مجموعه را به دست آورد.

۵. دلیل گزاره‌بودن یا نبودن یک عبارت را توضیح دهد.

۶. نمودار ون را درک کند.

۷. مفاهیم اجتماع و اشتراک را تعمیم دهد.

۸. اعمال تفاضل، متمم‌گیری و تفاضل متقارن روی مجموعه‌ها را انجام دهد.

۹. روابط بین مجموعه‌ها را با نمودار ون نشان دهد.

۱۰. دلیل عدم وجود مجموعه همه مجموعه‌ها را توضیح دهد.

مقدمه

یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات، مفهوم مجموعه است. این مفهوم امروزه به‌حدی گسترده شده است که ردپای آن را می‌توان تقریباً در همه شاخه‌های ریاضی پیدا کرد. اهمیت مجموعه در این است که در بسیاری از موارد، به جای تنها یک مورد خاص، با مجموعه‌ای از موارد روبه‌رو می‌شویم. برای مثال در هنگام پیداکردن نقاط پیوستگی یا مشتق‌پذیری یک تابع گاهی مجموعه‌ای از نقاط پیدا می‌شود که همگی در یک خاصیت معین، مشترک هستند.

در این فصل، نخست مفهوم مجموعه و زیرمجموعه را بیان می‌کنیم؛ سپس با چند گونه از مجموعه‌ها آشنا می‌شویم. بعد از آن، آن‌ها را با زبان ریاضی نمایش می‌دهیم و با استفاده از آن، وارد بحث جبر مجموعه‌ها می‌شویم. در نهایت، فصل را با معرفی و توضیح خانواده‌های اندیس‌دار از مجموعه‌ها و یک پارادوکس جالب به پایان می‌بریم.

۲-۱ قواعد انتگرال‌گیری نامعین

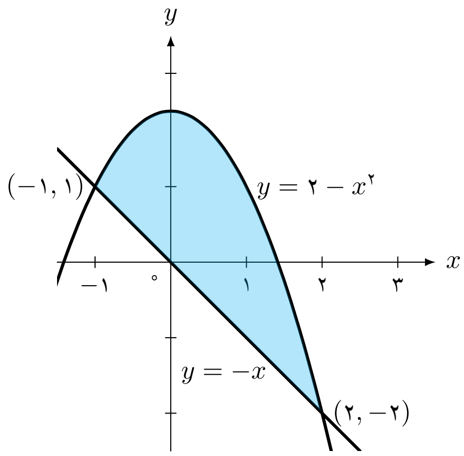
در این بخش ابتدا حدهای یک‌طرفه را یادآوری کرده و بعد از آن، به بیان مفهوم مشتق می‌پردازیم. سپس روابط و قضایای مشتق‌گیری را بیان می‌کنیم. در تعریف $\lim_{x\to a} f(x)$، xهایی را در نظر می‌گیریم که در یک بازهٔ باز شامل a و نه خود a باشند؛ یعنی مقادیر x نزدیک به a را، چه بزرگ‌تر از a باشند و چه کوچک‌تر از آن باشند.

حال فرض کنید تابعی مانند $f(x) = \sqrt{x - ۴}$ داریم. چون برای $x < ۴$، مقدار $f(x)$ وجود ندارد، بنابراین f در هیچ بازهٔ باز شامل ۴ تعریف نشده است. لذا $\lim_{x\to ۴} \sqrt{x-۴}$ بی‌معنی است. از آنجایی که استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری از توابع، کاری زمان‌بر است، در این بخش، قضایایی را مطرح می‌کنیم که با کمک آن‌ها بتوان مشتق توابع را به سادگی به دست آورد. شکل ۲-۱ را ببینید که در آن، ناحیهٔ محصور بین نمودار $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ را نشان می‌دهد.

با وجود این، اگر x را فقط به مقادیر بزرگ‌تر از ۴ محدود کنیم، می‌توانیم مقدار $\sqrt{x-۴}$ را به اندازهٔ دلخواه به ۰ نزدیک کنیم؛ در چنین حالتی، x را از سمت راست به ۴ میل می‌دهیم و آن‌را حد یک‌طرفه از راست و یا حد راست می‌نامیم. بنابراین

$$\lim_{x\to ۴^+} \sqrt{x - ۴} = ۰.$$

حد چپ نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود.



شکل ۲-۱. ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$

اگر تابع f در $x_۱$ تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در $x_۱$ با $f'_+(x_۱)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰^+} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۲-۱)$$

و یا به عبارت دیگر، تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. در ادامه، چند قضیه و مثال بیان می‌شود تا خواننده بیشتر با مفاهیم حد و مشتق آشنا شود. برای بحث بیشتر می‌توان به کتاب‌های پیشرفته‌تر حساب دیفرانسیل مراجعه کرد.

قضیه ۲-۱ (وجود حد). *گوییم $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد و برابر L است، اگر و تنها اگر*

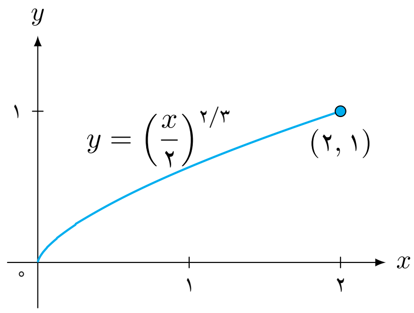
$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

هر دو موجود و برابر با L باشند.

مثال ۲-۱. فرض کنید تابع f مطابق شکل ۲-۲ و با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

تعریف شده است. آیا حد[1] تابع f وجود دارد؟



شکل ۲-۲. نمودار تابع $y = (x/۲)^{۲/۳}$ در بازه $[۰, ۲]$

حل. با توجه به تعریف تابع، اگر x عددی کوچک‌تر از ۰ باشد، $f(x)$ دارای مقدار ثابت -۱ است. لذا $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -۱$. با استدلالی مشابه، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = +۱.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) \neq \lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

و لذا حل مثال به پایان می‌رسد.

در معنی شناسی نمادین، برنامه‌ها و قطعه‌برنامه‌ها، به عنصرهایی از ساختارهای ریاضی مانند دامنه‌ها از دیدگاه اسکات[1] نگاشته می‌شود. اگر سیستم مدل‌بندی شده توانایی ایجاد انتخاب‌های تصادفی (یا انتخاب‌های شبه تصادفی) را داشته باشد، آنگاه منطقی است که رفتار خود را به وسیله اندازه‌ای که احتمال را برای سیستم ثبت می‌کند، مدل‌بندی کند تا زیرمجموعه اندازه‌پذیری از مجموعه همه حالت‌های ممکن بشود. این ایده‌ها برای اولین بار توسط صاحب جهرمی[2] و کازن[3] مطرح شد. هنگامی که کازن با فضاهای اندازه مطلق کار می‌کرد، اندازه‌های (احتمال) در نظر گرفته شده قبلی، به وسیله مجموعه‌های اسکات‌ـ باز یک dcpo گسترش پیدا کرد.

این ارتباط بین محاسبه‌پذیری و توپولوژی، بطور بسیار واضح توسط اسمیت[4] شرح داده

---

[۱] در ادامه فرض می‌شود خواننده تا حدودی با مفاهیم پایه‌ای حد آشناست.

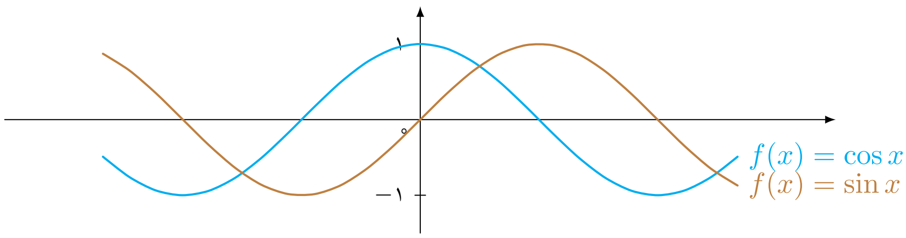
[1] Scott
[2] Saheb-Djahromi
[3] Kozen
[4] Smyth

شده و بعدها توسط آبرامسکی[۱]، ویکرز[۲] و دیگران، بیشتر توسعه داده شد.

تعریف (۱) (مشتق تابع). مشتق تابع f، تابعی است که با علامت f' نشان داده می‌شود و مقدار آن در هر عدد x واقع در دامنهٔ f به صورت

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{۲-۲}$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. شکل ۲-۳ را ببینید.



شکل ۲-۳. نمودار دو تابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

تمرین

۱. اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، مشتق آن‌را حساب کنید.

۲. نشان دهید مقدار

$$\int_۰^۱ \sqrt{۱ + \cos x}dx$$

نمی‌تواند ۲ باشد.

۳. از نامساوی $\cos x \geq (۱ - x^۲/۲)$ که برای هر xی برقرار است، استفاده کنید و یک کران پایین برای مقدار $\int_۰^۱ \cos x dx$ پیدا کنید.

۴. مشتق تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ را در نقطهٔ $x = ۲$ حساب کنید.

۲-۲ تکنیک‌های انتگرال‌گیری

در این بخش، مفهوم انتگرال‌های معین و نامعین را توضیح داده و سپس خواص انتگرال معین بیان می‌شود. همچنین بعضی از کاربردهای انتگرال معین توضیح داده می‌شود. بعد از آن،

[1] Abramsky
[2] Vickers

نوبت به انتگرال‌های نامعین می‌رسد و روش‌های انتگرال‌گیری برای این نوع انتگرال‌ها شرح داده می‌شود. از این روش‌ها بعدها در درس معادلات دیفرانسیل نیز استفاده می‌شود.

۲-۲-۱ انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a, b]$ باشد. این بازه را به n زیربازه با انتخاب $n - ۱$ نقطه مانند $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{n-۱}$ بین a و b تقسیم می‌کنیم به شرطی که

$$a < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n-۱} < b.$$

برای ایجاد یکنواختی، a را با $x_۰$ و b را با x_n نشان می‌دهیم. شکل ۲-۴ را ببینید.

قضیه ۲-۲ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌های معین). *اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه یک cای در بازهٔ $[a, b]$ وجود دارد به طوری که*

$$f(c) = \frac{۱}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم.

اگر f و g توابع پیوسته‌ای روی بازهٔ $[a, b]$ و با شرط $f(x) \geq g(x)$ باشند، آنگاه مساحت ناحیهٔ بین منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از a تا b برابر است با

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \qquad (۲-۳)$$

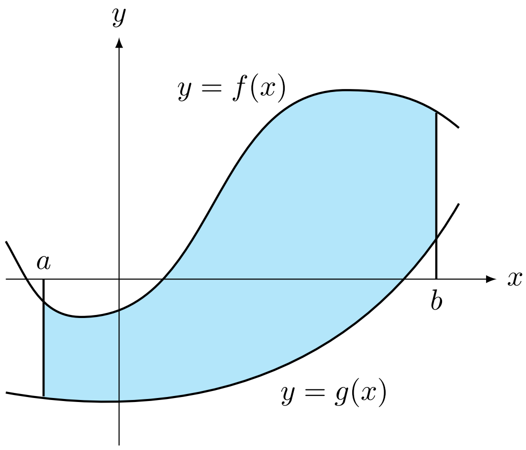
۲-۲-۲ جانشینی ساده‌کننده

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع، حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. در فصل بعدی باز هم نمونه‌های دیگری را بررسی خواهیم کرد که باعث فهم بیشتر مبحث خواهد شد.

با توجه به شکل، طول قطعه‌خط خاص PQ برابر L است. بنابراین طول منحنی به وسیلهٔ جمع

$$\sum_{k=۱}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^۲ + (\Delta y_k)^۲}$$

تقریب زده می‌شود.



شکل ۲-۴. ناحیه محصورشده بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$

ملاحظه ۲-۱. *اگر $x_۱$ عدد خاصی از دامنهٔ f باشد، آنگاه می‌توان نوشت*

$$f'(x_۱) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} \qquad (۴-۲)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطهٔ (۲-۴) برای محاسبهٔ مشتق تابع f در یک نقطهٔ خاص مانند $x_۱$ استفاده می‌شود.

اگر در رابطهٔ (۲-۴) قرار دهیم $x = x_۱ + \Delta x$، آنگاه عبارت «$\Delta x \to ۰$» معادل «$x \to x_۱$» است. بنابراین با توجه به فرمول (۲-۴) می‌توان نوشت

$$f'(x_۱) = \lim_{x \to x_۱} \frac{f(x) - f(x_۱)}{x - x_۱}$$

تابع f را در $x_۱$ مشتق‌پذیر گوییم، اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ I مشتق‌پذیر گوییم، اگر f به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۲-۲. مساحت ناحیهٔ محصور ایجاد شده توسط سهمی $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا نمودار هر دو منحنی را رسم می‌کنیم (شکل ۲-۵). طبق رابطهٔ (۲-۳)، قرار می‌دهیم $f(x) = ۲ - x^۲$ و $g(x) = -x$. حال برای پیدا کردن حدود انتگرال‌گیری، معادلهٔ $۲ - x^۲ =$

$-x$ را حل می‌کنیم. بنابراین $x^۲ - x - ۲ = ۰$. لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_{-۱}^{۲} (۲ + x - x^۲)dx \\ &= \left[۲x + \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳}\right]_{-۱}^{۲} \\ &= \left(۴ + \frac{۴}{۲} - \frac{۸}{۳}\right) - \left(-۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) \end{aligned}$$

که کار را تمام می‌کند.

این ایده‌ها برای اولین بار توسط صاحب جهرمی[۱] و کازن[۲] مطرح شد. هنگامی که کازن با فضاهای اندازه مطلق کار می‌کرد، اندازه‌های (احتمال) در نظر گرفته شده قبلی، به وسیله مجموعه‌های اسکات_باز یک dcpo گسترش پیدا کرد [۷].

این ارتباط بین محاسبه‌پذیری و توپولوژی، بطور بسیار واضح توسط اسمیت[۳] شرح داده شده و بعدها توسط آبرامسکی[۴]، ویکرز[۵] و دیگران، بیشتر توسعه داده شد.

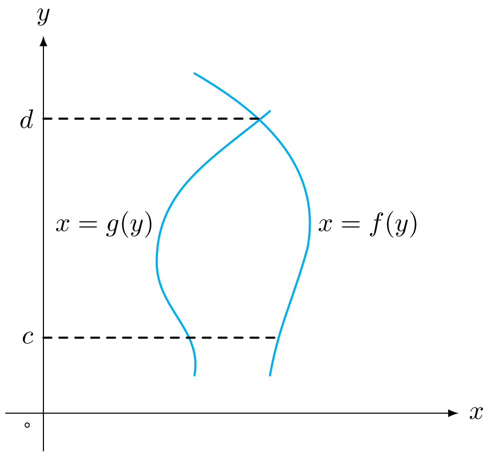
ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آنرا حساب کنیم. روش گفته شده در بالا، روش دیسک (شکل ۲-۵) نام دارد. روش دیگری نیز برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران وجود دارد که به روش واشر، معروف شده است . در ادامه بیشتر با این روش آشنا خواهیم شد [۲].

تعریف (۲) (روش واشر). هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^۲ - [r(x)]^۲)\, dx \tag{۲-۵}$$

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است.

[1] Saheb-Djahromi
[2] Lepoldo Smith Kozen
[3] George Smyth
[4] Abramsky
[5] John Vickers



شکل ۲-۵. نمودار منحنی‌های $x = g(y)$ و $x = f(y)$ در بازه $[c, d]$

دقت داشته باشید که در فرمول (۲-۹) اگر $r(x)$ در سراسر بازهٔ $[a, b]$ صفر باشد، همان فرمول روش دیسک، نتیجه می‌شود. بنابراین روش دیسک، حالت خاصی از روش واشر است.

سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام‌یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید.

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^۲ - [r(y)]^۲)\, dy + \int_\circ^۱ \pi\left(\left[\frac{۳}{۲} - \sqrt{y}\right]^۲\right) dy.$$

تمرین

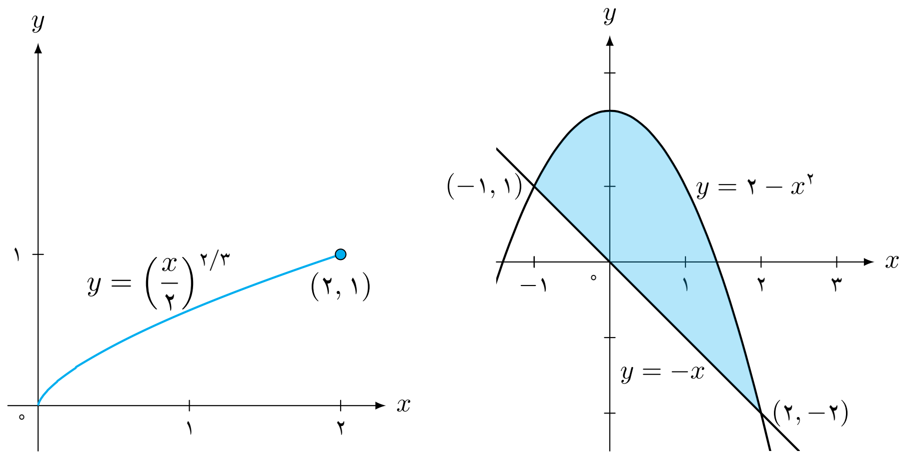
۱. اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۱۲$ باشد، تعیین کنید که f در کجا مشتق‌پذیر است؟

۲. متحرکی روی نمودار $y = \sqrt{x - ۲}$ با فرض $x \geq ۲$ حرکت می‌کند. اگر مؤلفهٔ x آن با آهنگ ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد، در لحظه‌ای که $x = ۶$ است، آهنگ تغییر مؤلفه y آن برابر چیست؟ آیا متحرک در حال صعود است یا نزول؟

۳. مشتق تابع $y = (\sqrt{x} + ۱)(\sqrt{x} - ۱)(x + ۱)$ را حساب کنید.

۴. مشتق

$$f(x) = \frac{(x - ۱)(x^۲ - ۲x)}{x^۴}$$

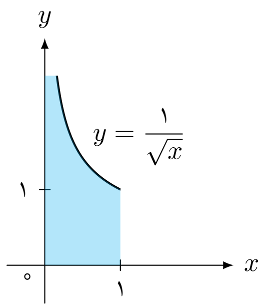


(آ) ناحیهٔ محصور توسط $y = ۲ - x^۲$ و خط $y = -x$ (ب) نمودار تابع $y = (x/۲)^{۲/۳}$ در بازه I

شکل ۲-۶. نمودار تعریف (۲) در حالت متقارن

را حساب کنید.

۵. طول منحنی زیر را چطور می‌توان محاسبه کرد؟



۲-۳ ظاهر شدن انتگرال اصلی در فرایند انتگرال‌گیری

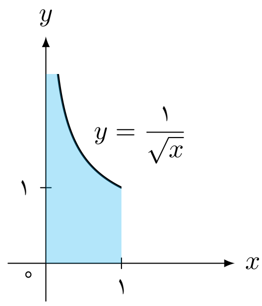
فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی $y = f(x)$ را از $x = a$ تا $x = b$ پیدا کنیم. طبق معمول، بازهٔ $[a,b]$ را افراز می‌کنیم و نقاط متناظر روی منحنی را با قطعه‌خط‌هایی به همدیگر وصل می‌کنیم تا یک مسیر چندضلعی تشکیل شود (شکل ۲-۷).

تعریف (۳). اگر f روی بازهٔ $[a,b]$ هموار باشد، طول منحنی $y = f(x)$ از a تا b برابر است

با

$$L=\int_a^b \sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\,dx=\int_a^b \sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx. \qquad (۶-۲)$$

گاهی ممکن است dy/dx در یک نقطهٔ خاص از بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشد. در این حالت dx/dy را حساب می‌کنیم و x را بر حسب تابعی از y بیان می‌کنیم (شکل ۲-۷).



شکل ۲-۷. نمونه‌ای از تابعی با برد نامعین

تمرین

۱. اگر $f(x)$ تابعی باشد به طوری که $f(۴)=-۳$ و $f'(۴)=-۵$ و g تابعی باشد به طوری که $g(x)=f(x)/x$ باشد، $g'(۴)$ را به دست آورید.

۲. اگر تابع f به صورت

$$y=\sin x-۲\cos x$$

داده شده باشد، رابطه‌ای بین y و y' بیابید که به x بستگی نداشته باشد.

۲-۴ سه جانشینی بنیادی

انتگرال‌های معینی که تا اینجا با آن‌ها سر و کار داشته‌ایم، دارای دو ویژگی بوده‌اند [۳]. یکی اینکه، دامنهٔ انتگرال‌گیری آن‌ها، یعنی a و b معین بود. دوم اینکه، برد انتگرالده روی این دامنه، معین بود. در این بخش یاد می‌گیریم که چگونه باید با این انتگرال‌ها برخورد کنیم (جدول ۲-۱).

مثال ۲-۳. همگرایی

$$\int_۰^۳ \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

را بررسی کنید.

حل. انتگرالده $f(x) = ۱/(x-۱)^{۲/۳}$ در $x = ۱$ نامتناهی می‌شود؛ اما روی $[۰, ۱)$ و $(۱, ۳]$ پیوسته است. همگرایی انتگرال روی $[۰, ۳]$ به انتگرال‌های از ۰ تا ۱ و ۱ تا ۳ بستگی دارد. روی $[۰, ۱)$ داریم

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} &= \lim_{b\to ۱^-} \int_{۰}^{b} \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} \\ &= \lim_{b\to ۱^-} [۳(b-۱)^{۱/۳} - ۳(۰-۱)^{۱/۳}] \\ &= ۳\end{aligned}$$

و لذا نتیجه به دست می‌آید.

مشتق به طور گسترده در علوم پایه، اقتصاد، پزشکی و علوم کامپیوتر برای محاسبه سرعت اولیه و شتاب و به به منظور توضیح رفتار ماشین‌آلات، تخمین میزان افت آب در هنگام پمپ شدن آب از تانکر آب و پیشگویی نتایج ایجاد خطا در اندازه‌گیری‌ها به کار می‌رود. پیدا کردن مشتق‌ها می‌تواند طولانی و سخت باشد. می‌توان گفت مشتق یکی از ارکان اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال محسوب می‌شود. در این فصل، تکنیک‌هایی برای محاسبه آسان‌تر و درک بهتر آن‌ها بیان می‌شود [۱].

تمرین

۱. مشتق تابع $y = \sqrt{x^۲ + ۱}$ را حساب کنید.

۲. اگر

$$\lim_{h\to o} \frac{f(۳+h) - f(۳)}{h} = -۱$$

باشد، مشتق $y = f(x^۴ + x + ۱)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ حساب کنید.

۳. اگر

$$f(\sin x - \cos x) = \sqrt{۲} g(۲x - \frac{\pi}{۴})$$

و $g'(\frac{\pi}{۴}) = ۴$ باشد، $f'(۰)$ را حساب کنید.

۴. در معادلهٔ زیر، dy/dx را به دست آورید.

$$۲y = x^۲ + \sin y.$$

جدول ۲-۱. نحوه عملکرد تابع f در ارتباط با پیوستگی

نام تابع	نقطه ناپیوستگی	نقطه بحرانی
تابع f	$x = ۱$	$a^۲ + ۳$
تابع g	$x = -۲$	$b - ۴$
تابع h	$x = ۰$	$a + b - ۷$

۵. مشتق معادلهٔ پارامتری

$$x = ۳t^۴ + t^۲ - ۵, \quad y = ۶t^۲ - t$$

را به دست آورید.

۶. فرض کنید f و g توابع حقیقی و مشتق‌پذیر باشند و $f(۰) = g(۰) = ۰$ و $g'(x) \neq ۰$ باشد. ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(۰)}{g'(۰)}.$$

۷. مشتق تابع $y = \operatorname{Arcsin} x$ را به دست آورید.

۸. شتق تابع $y = \operatorname{Arctan} x$ را به دست آورید.

۲-۵ کسرهای جزئی

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. در ادامه دربارهٔ حجم این نوع جسم‌ها بحث می‌کنیم.

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور xها و نمودار تابع پیوستهٔ $y = R(x)$، $a \leq x \leq b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^۲ \, dx \tag{۲-۷}$$

این ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم؛ اما اگر f و g توابع پیوستهٔ دلخواهی باشند، ناچاریم

که مساحت مورد نظر را با استفاده از انتگرال حساب کنیم. حال می‌توان کد این رابطه را به صورت زیر نوشت.

کد ۲-۱. محاسبه حجم جسم حاصل از دوران

```
\def\@makechapterhead#1{%
  \vspace*{50\p@}%
  {\parindent \z@ \raggedright \normalfont
    \ifnum \c@secnumdepth >\m@ne
      \if@mainmatter
        \huge\bfseries \@chapapp\space \thechapter
        \par\nobreak
        \vskip 20\p@
      \fi
    \fi
   \interlinepenalty\@M
  \Huge \bfseries #1\par\nobreak
 \vskip 40\p@
}}
```

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین محور yها و نمودار تابع پیوستهٔ $x = R(y)$، $c \leq y \leq d$ حول محور yها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^{۲} dy \tag{۲-۸}$$

حال اگر بتوانیم فرمولی برای طول مسیر ایجاد شده بیابیم، آنگاه فرمولی برای تقریب طول منحنی AB نیز خواهیم داشت.

مثال ۲-۴. مساحت ناحیه‌ای در ربع اول که از بالا به $y = \sqrt{x}$ و از پایین به محور xها و خط $y = x - ۲$ محدود است را بیابید.

حل. ابتدا نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل بالا، مرز سمت راستی ناحیه، خط $x = y + ۲$ است. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ لذا $f(y) = y + ۲$ است و مرز $y = -۱$ و $y = ۲$ است. حال چون، مقدار $y = -۱$، یک نقطهٔ تقاطع پایین محور xها را به دست می‌دهد، لذا قابل قبول نیست. بنابراین فقط مقدار $y = ۲$ قابل قبول بوده و لذا $b = ۲$ است.

حال از رابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy &= \int_0^2 [2 + y - y^2]dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

بنابراین $A = 10/3$ است.

هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش، از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx \tag{۲-۹}$$

استفاده می‌شود که در آن، $R(x)$ شعاع بیرونی و $r(x)$ شعاع داخلی واشر است.

همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجهٔ به دست آمده، با نتیجهٔ مثال قبل یکسان است و با مقدار محاسبات کمتری به دست آمده است. همچنین دقت شود که در این مثال، چون نسبت به y انتگرال گرفته‌ایم، تنها یک انتگرال‌گیری لازم است. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبهٔ حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم.

تمرین

۱. معادلهٔ خط مماس بر منحنی

$$y = \operatorname{Arcsin} \frac{x-1}{x+2}$$

را در نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها را بنویسید.

۲. در تابع

$$f(x) = \frac{5x+1}{x-1},$$

مقدار $(f^{-1})'(11)$ را به دست آورید.

۳. در تابع
$$y = \sqrt{\frac{۱}{\cos ۲x}},$$
رابطه‌ای بین y، y' و y'' بیابید که مستقل از x باشد.

۴. در تابع
$$y = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۵}},$$
رابطه‌ای بین y، y' و y'' بیابید که مستقل از x باشد.

۵. مشتق تابع $y = (\sqrt{x} + ۱)(\sqrt{x} - ۱)(x + ۱)$ را حساب کنید.

خلاصه فصل

منطق، بررسی اصول و روش‌هایی است که برای تشخیص استدلال‌های درست از استدلال‌های نادرست به کار می‌روند. هر دانشجوی ریاضی‌ای باید با اصول و روش‌هایی که در هر مرحله از برهان قضیه‌های ریاضی به کار می‌رود، آشنا باشد. در این فصل با مفهوم گزاره و رابطهای گزاره‌ای و روابط بین آن‌ها آشنا شدیم. در ادامه فصل، بحث را به سمت روش‌های اثبات قضیه‌ها و احکام ریاضی بردیم. خواندن عمیق این مطالب برای درک بهتر مطالب فصل‌های بعدی بسیار مؤثر خواهد بود.

خودآزمایی چهارگزینه‌ای فصل دوم

۱. کدام‌یک از گزاره‌های زیر یک گزاره درست‌گو است؟

الف) $(p \vee q) \wedge \sim q \longrightarrow q$ ب) $p \wedge q \longrightarrow p$

ج) $(p \wedge q) \vee \sim p \longrightarrow q$ د) $p \longrightarrow p \vee q$

۲. گزاره $p \longrightarrow q$ هم‌ارز کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

الف) $\sim p \longrightarrow q$ ب) $\sim q \longrightarrow \sim p$

ج) $\sim q \vee p$ د) $p \wedge q \longrightarrow q$

۳. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست‌گو است؟

الف) $\sim q \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$ ب) $p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow p$

ج) $\sim p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow \sim p$ د) $p \vee (q \longrightarrow p) \Longrightarrow p$

۴. کدام‌یک از گزاره‌های زیر قانون انتزاع نیست؟

الف) $(p \longrightarrow q) \vee p \Longrightarrow q$ ب) $(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$

ج) $(p \longrightarrow q) \wedge q \Longrightarrow p$ د) $(p \longrightarrow q) \vee q \Longrightarrow p$

۵. چند حالت منطقی برای گزاره $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)$ وجود دارد؟

الف) ۴ ب) ۸ ج) ۱۶ د) ۳۲

۶. گزاره $(\sim p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \longrightarrow r)$ بیانگر کدام‌یک از قانون‌های زیر است؟

الف) قانون پخش‌پذیری ب) قانون شرکت‌پذیری

ج) قانون تعدی د) قانون انتزاع

۷. گزاره $(p\vee \sim q)\wedge \sim p$ هم‌ارز منطقی کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

الف) $q \wedge p$ ب) $\sim q \wedge p$ ج) $\sim q \vee p$ د) $q\wedge \sim p$

۸. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت گزاره $\sim (p \longrightarrow \sim q)$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

الف) $p\wedge \sim q$ ب) $p\vee \sim q$ ج) $\sim p \wedge q$ د) $\sim p \vee q$

پاسخنامه

فصل اول

۱. الف
۲. ب
۳. د
۴. ب
۵. د
۶. ج
۷. د
۸. الف
۹. ب
۱۰. ج

فصل دوم

۱. ج
۲. ب
۳. الف
۴. د
۵. الف
۶. ب
۷. ب
۸. د

منابع

[۱] خیری، حسین، دامن‌افشان، وحید، مقدم، مهسا و وفائی، وجیهه، *نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی*، انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ۱۳۹۰.

[2] J. Breuer, *Introduction to the Theory of Sets*, Dover Publications, 2006.

[3] U. Daepp, P. Gorkin, *Reading, Writing, and Proving*, Springer, 2003.

[4] H. B. Enderton, *Elements of Set Theory*, Academic Press, 1977.

[5] T. Jech, *Set Theory*, 3rd. ed., Springer, 2006.

[6] D. Joseph W, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, 1979.

[7] K. T. Leung, D. L. C. Chen, *Elementary Set Theory*, Hong Kong University Press, 1967.

فهرست نمادها

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آونگ .... Pendulum

  ایده‌آل .... Ideal

پ

پایداری .... Stability

ت

تبدیل .... Transform

  کلی .... Global

چ

چندجمله‌ای .... Polynomial

  مشخصه .... Characteristic

  موهومی .... Imaginary

ز

زاویه .... Angle

  حاده .... Acute

ش

شعر .... Poem

عاشقانه .... Romantic
فارسی .... Persian
کلاسیک .... Classic
مذهبی .... Religious

ص
صعود .... Ascension

ع
عملگر .... Operator

ف
فلش .... Arrow

ک
کمان .... Bow

گ
گشتاور .... Moment
گونیا .... Bevel

م
مارپیچ .... Spiral
مجانبی .... Asymptotic
مخروط .... Cone
معادله .... Equation
خطی .... Linear
منحنی .... Curve

ن
نامساوی .... Inequality

ناموازی .... Antiparallel
نگاشت .... Map
بی‌نقص .... Perfect
نماد .... Notation
جمعی .... Additive
نمودار .... Diagram

ه

همگرایی .... Convergence

نمایه