

سپاس کنزاري...

فهرست مطالب

	فهرست مطالب	آ
	لیست جداول	ب
	مقدمه	پ
۱ کاربردها		۱
۱.۱ مقدمه		۲
۲.۱ ابرساختارهای شیمیایی		۲
۱.۲.۱ واکنش‌های زنجیره‌ای		۳
۲.۲.۱ هالوژن‌ها (F, Cl, Br, I)		۵
۳.۱ ابرساختارهای فیزیکی		۸
۱.۳.۱		۸
۲.۳.۱ فرآیند همجوشی در فیزیک هسته‌ای		۱۱
۳.۳.۱ ابرساختارهای جبری لپتون‌ها و عناصر دخیل در چرخه سوخت ستارگان . .		۱۲
۴.۱ ابرساختارها و وراثت		۱۵
مراجع		۲۳
منابع		۲۳

لیست جداول

۱۰	دسته بندی لپتون‌ها بر اساس بار الکتریکی و اعداد لپتونی	۱.۱
۱۲	برهم‌کنش بین عناصر در چرخه سوخت پروتون-پروتون I	۲.۱
۲۲	برهم‌کنش بین لپتون‌ها با در نظر گرفتن پایداری اعداد لپتونی	۳.۱

مقدمه

اولین سوالی که پس از دیدن عنوان این پایان نامه به ذهن می رسد این است که ابرساختارها چیستند و چگونه بوجود آمده اند. ساده ترین تعریفی که می توان در مورد ابرساختارها بیان کرد این است که ابرساختارهای جبری یک تعمیم طبیعی از جبر کلاسیک (سنتی) هستند.

در یک ساختار کلاسیک از ترکیب دو عضو، عضو جدیدی حاصل می شود در صورتیکه در ابرساختارهای جبری حاصل ترکیب دو عضو یک مجموعه است. به طور کلی اگر H یک مجموعه غیرتهی و $P^*(H)$ مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های غیرتهی H باشد آنگاه نگاشتی به صورت $f^i : H \times H \rightarrow P^*(H)$ خواهیم داشت که در آن $i \in \{1, \dots, n\}$ و n یک عدد صحیح مثبت است. نگاشت f^i را یک ابرعمل و همچنین به ازای هر x, y متعلق به H ، $f^i(x, y)$ را ابرحاصلضرب x, y می نامیم. در نهایت سیستم جبری (H, f^1, \dots, f^n) را یک ابرساختار می نامیم (لازم به ذکر است که معمولا n را برابر یک یا ۲ در نظر می گیریم). حال با توجه به مفروضات فوق و با اعمال نگاشت f^i می توانیم ابرساختارهای مختلفی را بدست آوریم که از این دست می توان به این موارد اشاره کرد: نیم ابرگروه ها، ابرگروه ها، ابرحلقه ها و ابرمیدان ها.

نکته قابل ذکر این است که در بعضی از موارد ابرعمل های خارجی را به صورت نگاشت $h : R \times H \rightarrow P^*(H)$ که در آن $R \neq H$ است در نظر می گیریم (معمولا R را یک حلقه یا ابرحلقه در نظر می گیریم). به عنوان مثال می توان به ابرمدول ها اشاره کرد که یک ابرساختار همراه با یک ابرعمل داخلی و یک ابرعمل خارجی است. به ساختار دوتایی (H, f) به همراه فقط یک ابرعمل داخلی ابرگروه واره می گوئیم که در واقع ساده ترین نوع از ابرساختارها هستند. از طرفی ابرگروه ها نیز نقش مهمی در بین ابرگروه واره ها ایفا می کنند و از این جهت می توان به چند نوع از ابرگروه ها که در سال های اخیر مطالعات زیادی بر روی آنها انجام گرفته است به این شرح اشاره کرد: ابرگروه های منظم، ابرگروه های وارون پذیر منظم، ابرگروه های متعارف و ابرگروه های شرکت پذیر.

معمولا حالت هایی که در نظریه ابرساختارها بویژه در نظریه ابرگروه ها اتفاق می افتد اغلب بسیار متفاوت تر و پیچیده تر نسبت به حالت کلاسیک آنها است. به عنوان مثال می توان به هم ریختی هایی از نوع های مختلف

بین ابرگروه‌ها و همچنین بین چندین نوع از ابرزیرگروه‌ها اشاره کرد که عبارتند از: هم‌ریختی‌های بسته، معکوس‌پذیر، فراسته، مزدوج‌پذیر.

حال نگاهی اجمالی به روند پیدایش و پیشرفت مفهوم ابرساختارها در سال‌های اخیر می‌اندازیم. مفهوم ابرساختارها برای نخستین بار توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام مارتی^۱ در هشتمین کنگره‌ی ریاضیات اسکاندیناوی در سال ۱۹۳۴ معرفی شد. پس از آن رفته رفته مقالات و کتاب‌های متنوعی در این زمینه به چاپ رسید و این شاخه از ریاضیات روند پیشرفت صعودی خود را آغاز نمود. یکی از اولین کتاب‌های اختصاصی در نظریه ابرگروه‌ها کتاب "مقدمه‌ای در نظریه ابرگروه‌ها" نوشته کرسینی^۲ بود که در سال ۱۹۹۳ به چاپ رسیده است. کتاب دیگر، کتاب "ابرساختارها و نمایش آنها" که توسط وگیوکلِس^۳ یک سال بعد از کتاب کرسینی چاپ شد. در روند سیر تکامل این شاخه از ریاضیات دانشمندان متوجه کاربردهای فراوان آن در زمینه‌های مختلف مثل هندسه، ابرگراف‌ها، روابط دودویی، شبکه‌ها، مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های ناهموار، ماشین‌های خودکار، رمزنویسی، کدگذاری، جبرهای میانی، روابط جبری، هوش مصنوعی، C -جبرها و آمار شدند. به همین منظور اخیراً نیز کتابی به نام "کاربردهای نظریه ابرساختارها" توسط کرسینی و لئورانو^۴ در رابطه با موارد ذکر شده در سال ۲۰۰۳ به چاپ رسیده است. کتاب مهم دیگری نیز در رابطه با کاربردهایی از ابرساختارها در هندسه وجود دارد به نام "هندسه‌های الحاقی" که توسط پرینوتیز^۵ و جانتوسیاک^۶ نوشته شده است. و اما آخرین کتابی که در این زمینه موجود است کتاب "نظریه ابرحلقه‌ها و کاربردهای آن" می‌باشد که بوسیله‌ی بیژن دواز و لئورانو در سال ۲۰۰۷ به رشته تحریر درآمده است.

لازم به ذکر است که در سال‌های اخیر تعدادی از تعمیم‌های خاص ابرساختارها نیز مطرح بوده است و بیشتر مقالات پیرامون این نوع از ابرساختارها می‌باشند که ما در اینجا به سه نوع از آنها اشاره می‌کنیم.

دسته‌ی اول این نوع از ابرساختارها با مقاله‌ای که در سال ۱۹۳۷ توسط وال^۷ تحت عنوان "ابرگروه‌ها" به

^۱Marty

^۲Corsini

^۳Vougiouklis

^۴Leoranu

^۵Prenowitz

^۶Jantosciak

^۷Wall

چاپ رسید معرفی شد. او در این مقاله ابرعمل‌ها را بدین گونه معرفی کرد که به ازای هر x و y متعلق به H ، ابرحاصلضرب $f(x, y)$ لزوماً شامل عناصر مجزای a_1, \dots, a_n نیست. به عبارت دیگر هر عنصر دلخواه a_i با تعداد تکرار معین می‌تواند در $f(x, y)$ قرار داشته باشد بدین معنی که a_i می‌تواند یک بار یا دوبار و یا به تعداد بیشتری در $f(x, y)$ قرار بگیرد. این چنین ابرگروه‌هایی را، ابرگروه‌های والی^۱ می‌نامند که کاربردهای فراوانی در فیزیک، خصوصاً در فیزیک اتمی و آنالیز هارمونیک دارند.

دسته دوم این نوع تعمیم، شامل ابرساختارهای n -تایی است که در آن بجای ابرعمل‌های دوتایی از ابرعمل‌های چندتایی استفاده می‌شود یعنی فرض بر این است که $n \geq 3$ باشد. در زیر نگاشت مربوط به این نوع از ابرساختارها را ملاحظه می‌کنید:

$$f : H \times \dots \times H \longrightarrow P^*(H)$$

این دسته از ابرساختارها توسط بیژن دواز و وگیوکلایس در سال ۲۰۰۶ تحت مقاله‌ای با عنوان "ابرگروه‌های n -تایی" معرفی شد و بعد از آن ریاضیدانان دیگری نیز بر روی این موضوع کار کردند و مقالاتی نیز در این زمینه ارائه کرده‌اند.

قبل از اینکه به معرفی دسته سوم پردازیم ابتدا مختصری در ارتباط با مجموعه‌های فازی مطالبی را بیان می‌کنیم. مفهوم مجموعه‌های فازی توسط پروفیسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵ ارائه شد. این مفهوم ابزار توانمند و مفیدی برای توصیف رفتار سیستم‌های پیچیده است. در واقع به طور مفید و مختصر کاربرد نظریه منطق فازی در تجزیه و تحلیل ریاضیات، با روش‌ها و ابزارهای کلاسیک است. هرچند در ابتدا این مفهوم مورد توجه دانشمندان وقت قرار نگرفت ولی به مرور زمان کاربردهای وسیعی در مورد نظریه مجموعه‌ی فازی در زمینه‌های گوناگون یافت شد که می‌توان به این موارد اشاره کرد: هوش مصنوعی، علوم کامپیوتر، مهندسی کنترل، رباتیک و غیره.

در سال‌های اخیر علاقمندی‌های قابل توجهی برای ارتباط بخشیدن بین ابرجبرها و مجموعه‌های فازی بوجود آمد. برای مثال می‌توان به روزنفلد^۲ که از پیشگامان این عرصه است اشاره کرد که در سال ۱۹۷۱

^۱Wall-hypergroup

^۲Rosenfeld

مجموعه‌های فازی را در زمینه‌ی نظریه‌ی ابرگروه‌ها و مفهوم زیرگروهی فازی از یک گروه را فرمول‌بندی و معرفی کرد. بنابراین دسته سوم از این نوع تعمیم نیز بدین صورت است که به‌ازای هر x و y متعلق به H ، تصویر $f(x, y)$ بجای یک زیرمجموعه‌ی H ، یک مجموعه‌ی فازی بر روی H است. به عنوان مثال ابرگروه معمولی (H, \circ) و زیرمجموعه‌ی فازی μ در H را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم که μ یک ابرزیرگروه فازی (H, \circ) است هرگاه هر برش از μ مانند μ_t یک ابرزیرگروه معمولی از (H, \circ) باشد. این نوع از ابرساختارها نیز به‌خصوص توسط ریاضیدانان ایرانی مطرح شده است که می‌توان به بیژن دواز، زاهدی، عامری و برزویی اشاره کرد.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله (یون‌کیانگ و دیگران، ۲۰۱۰) تدوین شده است. در این پایان‌نامه ما ابرمدول‌های L -فازی را روی یک ابرحلقه‌ی L -فازی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور ابتدا در فصل اول برخی از مفاهیم اصلی که در سرتاسر این پایان‌نامه استفاده خواهیم کرد را معرفی می‌کنیم. سپس در فصل دوم ابتدا ابرعمل‌های L -فازی و سپس تعریف ابرمدول‌های L -فازی روی یک ابرحلقه‌ی L -فازی را ارائه می‌دهیم. مفهوم R -ابرزیرمدول‌های L -فازی یک R -ابرمدول L -فازی را در فصل سوم بیان کرده و یک نوع ابرمدول خارج قسمتی L -فازی و همچنین یک رابطه α -منظم L -فازی را معرفی کرده و با استفاده از یک R -ابرزیرمدول L -فازی آنرا مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم نیز مفهوم هم‌ریختی (قوی) ابرمدول‌های L -فازی را معرفی کرده و بعضی از خواص آنرا مورد بررسی قرار می‌دهیم. و در نهایت در فصل پنجم نیز مثال‌هایی از کاربرد نظریه ابرساختارها در زمینه‌های مختلف علوم مانند شیمی، فیزیک و زیست را بیان می‌کنیم.

فصل ۱

کاربردها

۱.۱ مقدمه

همانطور که قبلا اشاره شد در کتاب "کاربردهای ابرساختارها" نمونه‌هایی از کاربرد نظریه ابرساختارها در ۵۰ سال اخیر معرفی شده است. که می‌توان به کاربرد آن در ابرگراف‌ها، هندسه، روابط دودویی، شبکه‌ها، کدگذاری، آمار و غیره اشاره کرد. در این فصل قصد داریم تعدادی از کاربردهای ابرساختارها را در شیمی، فیزیک و زیست که اخیرا بدست آمده‌اند را بیان کنیم. قبل از اینکه وارد مبحث اصلی شویم ابتدا یک نوع از ابرگروه‌های خاص به نام H_v -گروه‌ها را معرفی می‌کنیم.

در فصل اول با مفهوم ابرگروه‌ها آشنا شدیم. درواقع ابرگروه‌واره‌ای که نیم‌ابرگروه و شبه‌ابرگروه باشد را ابرگروه می‌نامیم یا به عبارت دیگر دارای خاصیت شرکت‌پذیری و تکثیرپذیری باشد.

تعریف ۱.۱.۱. ابرگروه‌واره (H, \circ) را یک H_v -گروه می‌نامیم هرگاه به‌ازای اعضای $x, y, z \in H$ دو شرط زیر برقرار باشند:

$$۱. (شرکت‌پذیری ضعیف) \quad x \circ (y \circ z) \cap (x \circ y) \circ z \neq \emptyset$$

$$۲. (تکثیرپذیری) \quad x \circ H = H \circ x = H$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید (H, \circ) را یک H_v -گروه باشد. زیرمجموعه غیرتهی K را یک H_v -زیرگروه

$$(H, \circ) \text{ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر } a \in K, a \circ K = K \circ a = K$$

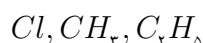
تعریف ۳.۱.۱. عضو دلخواه x از ابرگروه‌واره (H, \circ) را پوچتوان می‌نامیم هرگاه داشته باشیم، $x \circ x = x$.

۲.۱ ابرساختارهای شیمیایی

در این بخش چند نمونه از ابرگروه‌ها که با شیمی در ارتباطند را معرفی می‌کنیم. این نمونه‌های شیمیایی که در نظر گرفته شده‌اند به واکنش‌های زنجیره‌ای مربوط می‌شوند.

۱.۲.۱ واکنش‌های زنجیره‌ای

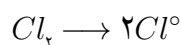
تعریف ۱.۲.۱. به اتم یا گروهی از اتم‌ها که دارای تک الکترون (جفت نشده) می‌باشند، رادیکال آزاد می‌گویند. چند نمونه از این نوع اتم‌ها عبارتند از:



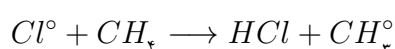
تعریف ۲.۲.۱. واکنشی را که دارای چندین مرحله است و در هر مرحله آن یک جسم واکنش پذیر بوجود می‌آید که موجب اجرا شدن مرحله بعدی می‌شود، واکنش زنجیری می‌نامند. گرچه ممکن است واکنش‌های زنجیری در جزئیات با یکدیگر تفاوت‌های زیادی داشته باشند ولی همگی در بعضی ویژگی‌های اساسی وجه مشترک دارند. که این ویژگی‌ها را می‌توان به مراحل انجام این نوع از واکنش‌ها مربوط دانست که عبارتند از: مرحله آغاز، انتشار و پایانی.

مثال ۳.۲.۱. کلراسیون متان مثالی از یک واکنش زنجیری است. در زیر مراحل انجام این واکنش را به تفصیل بیان می‌کنیم.

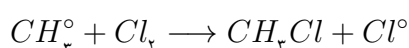
مرحله آغاز زنجیر: نخستین مرحله در واکنش‌های زنجیری، مرحله آغاز زنجیر است که در آن انرژی جذب می‌شود و یک ذره واکنش‌پذیر بوجود می‌آید. این مرحله، در واکنش کلراسیون متان، گسستن مولکول کلر به اتم‌های کلر است.



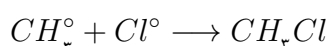
مرحله انتشار زنجیر: چند مرحله انتشار زنجیر وجود دارد در هر یک از این مراحل، یک ذره واکنش‌پذیر مصرف می‌شود و ذره‌ای دیگر بوجود می‌آید. در واکنش کلراسیون متان، این مراحل عبارتند از واکنش رادیکال‌های کلر با متان:



و واکنش رادیکال‌های متیل با مولکول کلر:



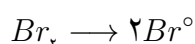
مرحله پایان زنجیر: در این مرحله، ذرات واکنش پذیر مصرف می شوند، ولی بوجود نمی آیند. در کلراسیون متان، این مراحل شامل اتحاد دو ذره واکنش پذیر یا جذب یکی از آنها بوسیله دیواره های ظرف واکنش است.



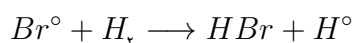
در شرایط معین به ازای هر کوانتوم نور (فوتون) جذب شده، در حدود ۱۰۰۰۰ مولکول متیل کلرید تشکیل می شود. هر فوتون موجب گسیستن یک مولکول کلر به دو اتم کلر می شود و هر اتم کلر یک زنجیر آغاز می کند، بطور میانگین هر زنجیر پیش از آنکه در نهایت پایان پذیرد، در چرخه انتشار زنجیر ۵۰۰۰ بار تکرار می شود.

مثال ۴.۲.۱. مثالی دیگر از واکنش های زنجیری را می توان به واکنش بین گاز H_2 و Br_2 اشاره کرد که مراحل آن به صورت زیر است:

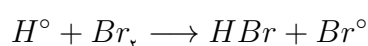
مرحله آغاز زنجیر: برخی از مولکول های Br_2 به اتم های آن تفکیک می شود:



مرحله انتشار زنجیر: رادیکال های Br° واسطه های فعالی هستند که پیشبرنده های زنجیر نامیده می شوند. یک رادیکال Br° با یک مولکول H_2 ترکیب می شود:



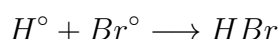
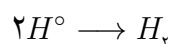
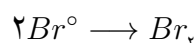
در این واکنش یک مولکول محصول، HBr و یک پیشبرنده دیگر، یک اتم H° (رادیکال) تولید می شود. رادیکال H° با مولکول Br_2 ترکیب می شود:



در این واکنش یک مولکول دیگر HBr و یک رادیکال Br° که پیشبرنده اصلی زنجیر است، تولید می شود. اتم Br° با یک مولکول دیگر H_2 ترکیب می شود و این چرخه مجدداً آغاز می گردد. این دو مرحله، چندین

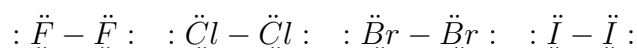
بار تکرار می شود.

مرحله پایان زنجیر: وقتی دو پیشبرنده بهم می رسند، انتهای دو زنجیر بسته می شود:



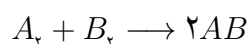
۲.۲.۱ هالوژنها (F, Cl, Br, I)

هالوژنها غیرفلزاتی هستند که دارای شکل های فیزیکی مختلفی هستند. مثلاً کلر و فلوئور به صورت گاز، برم مایع و ید جامد است. آنها در شرایط معمولی به صورت مولکول های دو اتمی اند یعنی به صورت F_2, Cl_2, Br_2, I_2 و اتم های این مولکول ها بوسیله یک پیوند کووالانسی ساده به یکدیگر متصل می شوند. مدل الکترون نقطه ای این نوع مولکول ها به صورت زیر است:



هالوژنها با هیدروژن واکنش داده و ترکیبات گازی به فرم HF, HCl, HBr و HI را تشکیل می دهند که همگی آنها در آب حل می شوند.

حال با توجه به مقدماتی که بیان شد به مبحث اصلی می پردازیم. یک واکنش زنجیری به صورت زیر را در نظر بگیرید:



در طول این روند مولکول های A_2, B_2 و AB از اجزاء کوچکتر A° و B° بوجود می آیند که همگی آنها با هم ترکیب می شوند.

تمام ترکیبات احتمالی مجموعه $\mathcal{H} = \{A^{\circ}, B^{\circ}, A_2, B_2, AB\}$ ، که می توانند بدون صرف انرژی بدست آیند را می توان به صورت زیر نشان داد:

+	A°	B°	A_γ	B_γ	AB
A°	A°, A_γ	A°, B°, AB	A°, A_γ	$A^\circ, B_\gamma, B^\circ, AB$	$A^\circ, AB, A_\gamma, B^\circ$
B°	A°, B°, AB	B°, B_γ	$A^\circ, B^\circ, AB, A_\gamma$	B°, B_γ	$A^\circ, B^\circ, AB, B_\gamma$
A_γ	A°, A_γ	$A^\circ, B^\circ, AB, A_\gamma$	A°, A_γ	\mathcal{H}	$A^\circ, B^\circ, A_\gamma, AB$
B_γ	$A^\circ, B^\circ, B_\gamma, AB$	B°, B_γ	\mathcal{H}	B°, B_γ	$A^\circ, B^\circ, B_\gamma, AB$
AB	$A^\circ, AB, A_\gamma, B^\circ$	$A^\circ, B^\circ, AB, B_\gamma$	$A^\circ, B^\circ, A_\gamma, AB$	$A^\circ, B^\circ, B_\gamma, AB$	\mathcal{H}

قضیه ۵.۲.۱. $(\mathcal{H}, +)$ یک H_v -گروه است.

برهان. خاصیت‌های تکثیرپذیری و پخش‌پذیری ضعیف به وضوح برقرارند. به عنوان نمونه نحوه محاسبه چند مورد از خاصیت پخش‌پذیری ضعیف را در زیر نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
 (AB + A_\gamma) + B_\gamma &= \{AB, A_\gamma, A^\circ, B^\circ\} + B_\gamma \\
 &= AB + B_\gamma \cup A_\gamma + B_\gamma \cup A^\circ + B_\gamma \cup B^\circ + B_\gamma \\
 &= \{A^\circ, B^\circ, B_\gamma, AB\} \cup \mathcal{H} \cup \{A^\circ, B_\gamma, B^\circ, AB\} \cup \{B^\circ, B_\gamma\} \\
 &= \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

واز طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 AB + (A_\gamma + B_\gamma) &= AB + \mathcal{H} \\
 &= AB + A^\circ \cup AB + B^\circ \cup AB + A_\gamma \cup AB + B_\gamma \cup AB + AB \\
 &= \{A^\circ, AB, A_\gamma, B^\circ\} \cup \{A^\circ, B^\circ, AB, B_\gamma\} \cup \{A^\circ, B^\circ, A_\gamma, AB\} \\
 &\quad \cup \{A^\circ, B^\circ, B_\gamma, AB\} \cup \mathcal{H} \\
 &= \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

بنابراین $(AB + A_\gamma) + B_\gamma \cap AB + (A_\gamma + B_\gamma) \neq \emptyset$.

به عنوان نمونه‌ای دیگر داریم:

$$\begin{aligned}(AB + A^\circ) + A^\circ &= \{AB, A^\circ, A_\vee, B^\circ\} + A^\circ \\ &= \{A_\vee, A^\circ, AB, B^\circ\}\end{aligned}$$

و از طرف دیگر

$$\begin{aligned}AB + (A^\circ + A^\circ) &= AB + \{A_\vee, A^\circ\} \\ &= \{A_\vee, AB, A^\circ, B^\circ\}\end{aligned}$$

بنابراین $(AB + A^\circ) + A^\circ \cap AB + (A^\circ + A^\circ) \neq \emptyset$

و همچنین

$$\begin{aligned}(A_\vee + A_\vee) + B^\circ &= \{A^\circ + A_\vee\} + B^\circ \\ &= A^\circ + B^\circ \cup A_\vee + B^\circ \\ &= \{A^\circ, B^\circ, AB\} \cup \{A^\circ, B^\circ, AB, A_\vee\} \\ &= \{A^\circ, B^\circ, AB, A_\vee\}\end{aligned}$$

و از طرف دیگر

$$\begin{aligned}A_\vee + (A_\vee + B^\circ) &= A_\vee + \{A^\circ, B^\circ, AB, A_\vee\} \\ &= \mathcal{H}\end{aligned}$$

بنابراین $(A_\vee + A_\vee) + B^\circ \cap A_\vee + (A_\vee + B^\circ) \neq \emptyset$

□

بقیه موارد نیز به همین صورت اثبات می‌شود.

تبصره ۶.۲.۱. $\mathcal{H}_\vee = \{B^\circ, B_\vee\}$ و $\mathcal{H}_\wedge = \{A^\circ, A_\vee\}$ تنها H_v -زیرگروه‌های $(\mathcal{H}, +)$ هستند.

□

برهان. با توجه به تعریف H_v -زیرگروه اثبات بدیهی است.

حال فرض کنید $A = H$ و B را یکی از اعضای مجموعه $\{F, Cl, Br, I\}$ (به عنوان مثال $B = I$) در

نظر بگیریم، در این صورت جدول واکنش آن به صورت زیر خواهد بود:

+	H°	I°	H_γ	I_γ	HI
H°	H°, H_γ	H°, I°, HI	H°, H_γ	$H^\circ, I_\gamma, I^\circ, HI$	$H^\circ, HI, H_\gamma, I^\circ$
I°	H°, I°, HI	I°, I_γ	$H^\circ, I^\circ, HI, H_\gamma$	I°, I_γ	$H^\circ, I^\circ, HI, I_\gamma$
H_γ	H°, H_γ	$H^\circ, I^\circ, HI, H_\gamma$	H°, H_γ	$H^\circ, I^\circ, H_\gamma, I_\gamma, HI$	$H^\circ, I^\circ, H_\gamma, HI$
I_γ	$H^\circ, I^\circ, I_\gamma, HI$	I°, I_γ	$H^\circ, I^\circ, H_\gamma, I_\gamma, HI$	I°, I_γ	$H^\circ, I^\circ, I_\gamma, HI$
HI	$H^\circ, HI, H_\gamma, I^\circ$	$H^\circ, I^\circ, HI, I_\gamma$	$H^\circ, I^\circ, H_\gamma, HI$	$H^\circ, I^\circ, I_\gamma, HI$	$H^\circ, I^\circ, H_\gamma, I_\gamma, HI$

۳.۱ ابرساختارهای فیزیکی

هدف این بخش، تعمیم این نظریه جدید ریاضی به علم فیزیک با تمرکز روی دو بخش فیزیک هسته‌ای و فیزیک ذرات بنیادی است. به همین منظور، ابتدا به اختصار به معرفی ذرات بنیادی، مفهوم همجوشی در فیزیک هسته‌ای و نحوه‌ی انجام فرآیندهای همجوشی در ستارگان جهت تولید انرژی می‌پردازیم. در انتها نیز نشان خواهیم داد که ابرکنش (یا ابرعمل) تعریف شده در مجموعه‌های خاص، همراه با اعضای آن مجموعه یک ابرساختار جبری را تشکیل می‌دهند.

۱.۳.۱ لپتون‌ها^۱ در فیزیک ذرات بنیادی

در علم فیزیک ذرات بنیادی، یک ذره بنیادی به ذره‌ای گفته می‌شود که هیچ ساختار داخلی ندارد. لذا این ذره یکی از بلوک‌های ساختمانی جهان اطراف ما را تشکیل می‌دهد. عملاً از سال ۱۸۹۷ که الکترون به عنوان بنیادی‌ترین عنصر جهان، توسط تامسون کشف شد فیزیک ذرات بنیادی متولد گردید. از آن پس ذرات بنیادی بتدریج کشف و معرفی گردیدند. در جهت ایجاد نظم در این مجموعه بزرگ از ذرات و ارائه‌ی الگویی مناسب برای توجیه سازوکار برهم کنش ذرات، مدل‌های متفاوتی ارائه گردید که مهمترین آنها مدل استاندارد نامیده می‌شود که تاکنون پیشگویی‌های این مدل توافق خوبی با نتایج تجربی داشته است.

^۱Leptons

در این تئوری، شش کوارک^۱ و شش لپتون به همراه پادذراتشان و بوزون‌های برداری میانی، که نقش حامل نیرو را ایفا می‌کنند، مجموعاً ۶۱ ذره بنیادی جهان ما را تشکیل می‌دهند. مطابق با مدل کوارک در نظریه مدل استاندارد، کوارک‌ها آزادانه در طبیعت یافت نمی‌شوند بلکه در ترکیب‌های قابل مشاهده هادرونی^۲ همچون باریون‌ها^۳ و مزون‌ها^۴ وجود دارند. برخلاف کوارک‌ها، لپتون‌ها می‌توانند آزادانه در طبیعت یافت شوند لذا آنها یک گروه مهم از ذرات بنیادی هستند مخصوصاً الکترون‌ها که یکی از اجزای اتم هستند. در این بخش ابرساختار بودن این گروه از ذرات را بررسی خواهیم کرد.

در مدل استاندارد، شش لپتون و شش پادلپتون در سه نسل ظاهر می‌شوند. نسل اول شامل الکترون، پوزیترون، نوترینوی الکترون و پادنوترینوی الکترون، نسل دوم شامل میون، پادمیون، نوترینوی میون و پادنوترینوی میون و نسل سوم شامل تائون، پادتائون، نوترینوی تائون و پاد نوترینوی تائون می‌باشد. بنابراین گروه لپتون‌ها شامل دوازده عضو به صورت $\{e^-, \nu_e, e^+, \bar{\nu}_e, \mu^-, \nu_\mu, \mu^+, \bar{\nu}_\mu, \tau^-, \nu_\tau, \tau^+, \bar{\nu}_\tau\}$ است. تفاوت اصلی بین نوترینوها و پادنوترینوها در عدد کوانتومی به نام عدد لپتونی است. در مدل استاندارد به اعضای هر نسل از لپتون‌ها عدد لپتونی یکسانی نسبت داده می‌شود. به نسل اول عدد الکترونی L_e ، به نسل دوم عدد میونی L_μ و به نسل سوم عدد تائونی L_τ نسبت می‌دهند. این اعداد لپتونی به همراه بار لپتون‌ها در جدول زیر دسته‌بندی شده‌اند.

لپتون‌ها فاقد عدد کوانتومی باررنگ می‌باشند لذا در برهم‌کنش‌های قوی شرکت نمی‌کنند و تنها از طریق برهم‌کنش‌های الکتروضعیف بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند. به خصوص نوترینوها که بدون بار الکتریکی هستند و تنها در برهم‌کنش‌های ضعیف شرکت می‌کنند. در هر برهم‌کنش الکتروضعیف علاوه بر پایستگی بارالکتریکی، پایستگی عدد لپتونی نیز همواره برقرار است. این پایستگی جدید بدین معنی است که لپتون‌ها و پاد لپتون‌ها همواره به صورت زوج از یک نسل در برهم‌کنش شرکت می‌کنند. برای مثال فرآیندهای زیر

^۱Quark

^۲Hadron

^۳Baryons

^۴Mesons

جدول ۱.۱: دسته بندی لپتون‌ها بر اساس بار الکتریکی و اعداد لپتونی

نماد	Q	L_e	L_μ	L_τ
e^-/e^+	$-1/+1$	$+1/-1$	\circ	\circ
$\nu_e/\bar{\nu}_e$	\circ	$+1/-1$	\circ	\circ
μ^-/μ^+	$-1/+1$	\circ	$+1/-1$	\circ
$\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$	\circ	\circ	$+1/-1$	\circ
τ^-/τ^+	$-1/+1$	\circ	\circ	$+1/-1$
$\nu_\tau/\bar{\nu}_\tau$	\circ	\circ	\circ	$+1/-1$

تحت پایستگی عدد تائونی و الکترونی مجاز هستند:

$$e^- + \nu_\tau \longrightarrow e^- + \nu_\tau, \tau^- + \nu_e$$

برای راحتی کار از نمادگذاری جدیدی برای نشان دادن محصولات برهم‌کنش استفاده می‌کنیم. برای مثال:

$$e^- + \nu_\tau \longrightarrow \{e^-, \nu_\tau, \tau^-, \nu_e\}$$

محصولات خروجی ممکن است بسیار متنوع باشند لذا لازم است که پایستگی تمام اعداد لپتونی در فرآیند

بررسی شود. برای مثال در برهم‌کنش $\mu^- + \mu^+$ شش جفت ذره خروجی می‌توانند به عنوان محصولات

نهایی مشاهده شوند:

$$\mu^- + \mu^+ \longrightarrow e^- + e^+, \mu^- + \mu^+, \tau^- + \tau^+, \nu_e + \bar{\nu}_e, \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau + \bar{\nu}_\tau$$

که مطابق با نمادگذاری جدید داریم:

$$\mu^- + \mu^+ \longrightarrow \{e^-, e^+, \mu^-, \mu^+, \tau^-, \tau^+, \nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau\} = L$$

در رابطه‌ی فوق، L بیانگر مجموعه لپتون‌ها است. سایر برهم‌کنش‌های ممکن بین مجموعه عناصر گروه

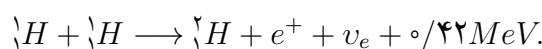
لپتون‌ها، در جدول ۳.۱ مرتب شده است. در مرتب‌سازی این جدول از نوشتن عناصر تکراری اجتناب

کرده‌ایم. همه‌ی برهم‌کنش‌های نشان داده شده در جدول ۳.۱، در مرتبه‌ی اول اختلال^۱ هستند.

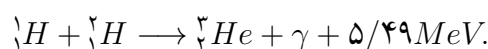
^۱Leading Order

۲.۳.۱ فرآیند همجوشی در فیزیک هسته‌ای

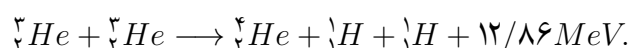
از موارد کاربرد ابرساختارها در فیزیک هسته‌ای، در فرآیندهای همجوشی هسته‌ای است. علم سنتز هسته‌ای فرآیند همجوشی در ستارگان را توضیح می‌دهد. چگونگی تولید انرژی در ستارگان یکی از جالب‌ترین مباحث مطرح در اختر فیزیک می‌باشد. وظیفه تولید انرژی در ستارگان به عهده واکنش همجوشی است. در چنین واکنشی دو یا چند عنصر سبک با هم ترکیب شده و عنصری سنگین‌تر به همراه مقداری انرژی تولید می‌کنند. از آنجایی که ماده اصلی تشکیل دهنده ستارگان، عنصر هیدروژن می‌باشد لذا همجوشی چهار عنصر هیدروژن جهت تشکیل هلیوم، آغاز تولید انرژی در ستارگان می‌باشد. ترکیب این عناصر سبک و تشکیل عنصر سنگین‌تر به چرخه سوخت معروف است. فرآیند هیدروژن سوزی با چهار چرخه پروتون-پروتون I ، پروتون-پروتون II ، پروتون-پروتون III و چرخه کربن-نیتروژن-اکسیژن انجام می‌گیرد. در اینجا فقط چرخه پروتون-پروتون I را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این چرخه، واکنش‌ها عبارتند از:



این واکنش به برهم‌کنش ضعیف تبدیل یک پروتون به یک نوترون معروف است. پوزیترون تولید شده از این واکنش سریعاً با یک الکترون جفت شده و طی فرآیند نابودی زوج، مقدار $1.02MeV$ انرژی اضافی آزاد می‌شود. دوتریم (2_1H) ایجاد شده، در ترکیب با یک هیدروژن به هلیوم-۳ تبدیل می‌شود:



در واکنش فوق $5.49MeV$ انرژی به شکل گرمایی ساطع می‌گردد. در ادامه، هلیوم تولید شده نیز می‌تواند با همتای خود که در همجوشی مشابه دو مرحله فوق ایجاد شده است، برهم‌کنش کرده و واکنشی به صورت



داشته باشند. بنابراین می‌توان نتیجه چرخه سوخت پروتون-پروتون I را تبدیل هیدروژن به هلیوم و آزاد شدن $26.72MeV$ انرژی به‌ازای تشکیل هر هلیوم دانست. مطابق با نمادگذاری تعریف شده در بخش قبل، فرآیند فوق به صورت ${}^3_2He + {}^3_2He \rightarrow \{{}^4_2He, {}^1_1H\}$ نشان داده می‌شود. کلیه عناصر مؤثر در چرخه فوق

شامل $S = \{\backslash H, \backslash H, \backslash He, \backslash He\}$ به همراه ابرعمل "همجوشی" در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

جدول ۲.۱: برهم‌کنش بین عناصر در چرخه سوخت پروتون-پروتون I

\oplus	$\backslash H$	$\backslash H$	$\backslash He$	$\backslash He$
$\backslash H$	$\backslash H$	$\backslash H$	$\backslash H, \backslash H$	$\backslash He, \backslash H$
$\backslash H$	$\backslash He$	$\backslash H$	$\backslash He, \backslash H$	$\backslash He, \backslash H$
$\backslash He$	$\backslash He, \backslash H$	$\backslash He, \backslash H$	$\backslash H, \backslash He$	$\backslash He, \backslash He$
$\backslash He$	$\backslash He, \backslash H$	$\backslash He, \backslash H$	$\backslash H, \backslash He$	$\backslash He$

۳.۳.۱ ابرساختارهای جبری لپتون‌ها و عناصر دخیل در چرخه سوخت ستارگان

در این قسمت نشان خواهیم داد که مجموعه لپتون‌ها به همراه ابرعمل خاص خود، همچنین مجموعه عناصر دخیل در فرآیند همجوشی در تولید انرژی ستارگان همراه با ابرعمل مختص خود تشکیل یک ابرساختار را می‌دهند.

گزاره ۱.۳.۱. فرض کنید L مجموعه لپتون‌ها و \otimes ابرعمل تعریف شده در جدول ۳.۱ باشد، در این صورت زوج (L, \otimes) یک H_v -گروه آبدی که هر عضو آن خودتوان است.

برهان. برای بررسی خاصیت شرکت پذیری ضعیف این H_v -گروه، مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$v_\mu \otimes (\bar{v}_e \otimes e^+) = \{e^+, \mu, \bar{v}_e, v_\mu\} \quad , \quad (v_\mu \otimes \bar{v}_e) \otimes e^+ = \{e^+, \mu, \bar{v}_e, v_\mu\}$$

$$v_\mu \otimes (\bar{v}_e \otimes e^+) \cap (v_\mu \otimes \bar{v}_e) \otimes e^+ \neq \emptyset$$

از آنجاییکه برای هر ذره در مجموعه لپتون‌ها همواره یک پادذره وجود دارد و برهم‌کنش یک ذره با پادذره خود، تمام اعضای مجموعه را نتیجه می‌دهد، بنابراین در ابرساختار لپتونی شرط تکثیرپذیری همواره برقرار است. به عبارتی:

$$e^- \otimes L = \mu^- \otimes L = v_\tau^- \otimes L = \dots = L$$

در ادامه به اختصار، به ذکر چند نمونه از H_v -زیرگروه‌های، (L, \otimes) می‌پردازیم:

۱. H_v -زیرگروه لپتونی مرتبه‌ی ۲ به صورت $(\{\mu, \bar{\nu}_e\}, \otimes)$ است.

۲. H_v -زیرگروه لپتونی مرتبه‌ی ۴ به صورت $(\{e, \tau, \nu_e, \nu_\tau\}, \otimes)$ است.

۳. H_v -زیرگروه لپتونی مرتبه‌ی ۶ به صورت $(\{e^+, \mu^+, \tau^+, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}, \otimes)$ است.

□

گزاره ۲.۳.۱. فرض کنید مجموعه $S = \{\backslash H, \backslash H, \backslash He, \backslash He\}$ شامل تمام عناصر دخیل در فرآیند تولید

انرژی در ستارگان بوده و \oplus ابرعمل همجوشی تعریف شده در جدول انتهایی بخش باشد در این صورت

زوج (S, \oplus) یک H_v -گروه آبدی است که در آن $\backslash H$ و $\backslash He$ اعضای خودتوان این ابرساختار هستند.

برهان. خاصیت‌های تکیه‌پذیری و پخش‌پذیری ضعیف به وضوح برقرارند. به عنوان نمونه موارد زیر را در

نظر بگیرید.

به ازای عناصر دلخواه $\backslash H, \backslash H, \backslash He \in S$ داریم:

$$\begin{aligned} \backslash H \oplus (\backslash He \oplus \backslash H) &= \backslash H \oplus \{\backslash He, \backslash H\} \\ &= \backslash H \oplus \backslash He \cup \backslash H \oplus \backslash H \\ &= \{\backslash H, \backslash He\} \cup \{\backslash He\} \\ &= \{\backslash H, \backslash He\} \end{aligned}$$

و از طرف دیگر

$$\begin{aligned} (\backslash H \oplus \backslash He) \oplus \backslash H &= \{\backslash He, \backslash H\} \oplus \backslash H \\ &= \backslash He \oplus \backslash H \cup \backslash H \oplus \backslash H \\ &= \{\backslash He, \backslash H\} \cup \{\backslash He\} \\ &= \{\backslash He, \backslash H\} \end{aligned}$$

بنابراین $\backslash H \oplus (\uparrow He \oplus \backslash H) \cap (\backslash H \oplus \uparrow He) \oplus \backslash H \neq \emptyset$

همچنین به ازای عنصر دلخواه $\backslash H \in S$ داریم:

$$\begin{aligned}\backslash H \oplus S &= \backslash H \oplus \{\backslash H, \backslash H, \uparrow He, \uparrow He\} \\ &= \backslash H \oplus \backslash H \cup \backslash H \oplus \backslash H \cup \backslash H \oplus \uparrow He \cup \backslash H \oplus \uparrow He \\ &= \backslash H \cup \uparrow He \cup \{\uparrow He, \backslash H\} \cup \{\uparrow He, \backslash H\} \\ &= \{\backslash H, \backslash H, \uparrow He, \uparrow He\} \\ &= S\end{aligned}$$

و به همین ترتیب می توان نشان داد $S \oplus \backslash H = S$. بنابراین $\backslash H \oplus S = S \oplus \backslash H = S$ □

در این بخش نشان دادیم که مجموعه لپتون‌ها در فیزیک ذرات بنیادی و مجموعه عناصر دخیل در فرآیند تولید انرژی ستارگان، تحت ابرعمل خاص خود تشکیل یک ابرساختار را می‌دهند. این دیدگاه جدید از برهم‌کنش ذرات، علاوه بر آنکه منجر به یک نظم نوین در انجام فرآیندها می‌گردد، این امکان را می‌دهد تا از خاصیت ابرساختار بودن مجموعه تحت مطالعه، جهت پیش‌گویی‌های آتی از برهم‌کنش عناصر مجموعه بهره‌بریم. این تغییر نگرش در برهم‌کنش دو پدیده، می‌تواند منشاء بسیاری از تحولات در علوم کاربردی باشد.

۴.۱ ابرساختارها و وراثت

هدف اصلی ما در این بخش این است که به ارائه نمونه‌هایی از ابرساختارهای جبری که با وراثت در ارتباطند بپردازیم. مباحث ریاضی آن دسته از ابرساختارهای جبری که در ژنتیک بوجود می‌آیند، بسیار جالب است. علاوه بر این بسیاری از خواص جبری این ابرساختارها دارای اهمیت زیادی در ژنتیک است. در واقع یک عملکرد کاملاً متقابل بین ابرساختارهای جبری و خواص ژنتیکی مربوطه وجود دارد که باعث جذابیت این موضوع می‌شود. لازم به ذکر است عموماً این نوع از ابرساختارها جابجایی و شرکت‌پذیر ضعیف هستند.

علم ژنتیک با آزمایشات فردی به نام یوهان گروگر مندل^۱ در سال ۱۸۶۶ شروع شد. او کشیشی اتریشی بود که توانست از ترکیب ریاضیات و زیست‌شناسی، قوانین حاکم بر انتقال صفات وراثتی را که حاصل آزمایش‌هایش روی گیاه نخود فرنگی بود، شناسایی کند. ولی از آنجایی که در جامعه علمی آن زمان بسیاری از افراد با نفوذ همچنان نظریات داروین و لامارک را صحیح می‌پنداشتند به دیدگاه‌ها و کشفیات او اهمیت چندانی ندادند و نتایج کارهای مندل به دست فراموشی سپرده شد. به نظر می‌رسید، پرونده این دانش رو به بسته شدن است. در سال ۱۹۰۰ میلادی کشف مجدد قوانین ارائه شده از سوی مندل، توسط دروینس، شرماک و کورنر باعث شد که نظریات او مورد توجه و قبول قرار گرفته و مندل به عنوان پدر علم ژنتیک شناخته شود. بعد از کشف مجدد کارهای مندل در ابتدای این قرن، خیلی سریع به این موضوع پی برده شد که اصول اساسی وراثت که وی در نخود فرنگی کشف کرده بود در گونه‌های گیاهی و جانوری دیگر نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

اکنون برای پی بردن به نحوه ارتباط بین ابرساختارها و علم وراثت مثال‌هایی را بیان می‌کنیم. البته قبل از پرداختن به کارهای مندل بهتر است با بعضی از اصطلاحات اولیه ژنتیک آشنا شویم.

فنوتیپ^۲: هر صفت یا مشخصه‌ای که بتواند در نسل‌های مختلف خود را نشان داده و یک الگوی وراثتی از خود نشان دهد را فنوتیپ می‌نامیم. برای مثال رنگ چشم یا شکل برگ فنوتیپ محسوب می‌شوند.

^۱Johann Gregor Mendel

^۲ Phenotype

ژنوتیپ^۱: عبارت است از ساختار ژنی برای یک فنوتیپ خاص که می‌تواند آن فنوتیپ را ایجاد کند. برای مثال ژنوتیپ RR در گیاه نخود فرنگی باعث بوجود آمدن فنوتیپ صافی دانه‌ها در این گیاه می‌شود.

غالبیت^۲: ممکن است برای یک صفت چندین فنوتیپ وجود داشته باشد. وقتی که دو فرد دارای فنوتیپ مختلف برای یک صفت، که کاملاً خالص^۳ هستند با یکدیگر آمیزش کنند و در فرزندان تنها یک فنوتیپ مشاهده شود گفته می‌شود که فنوتیپ ظاهر شده در فرزندان غالب^۴ و فنوتیپ ظاهر نشده مغلوب^۵ است. در اینجا فرزند از نظر فنوتیپی شبیه یکی از والدین است اما به لحاظ ژنوتیپی دورگه^۶ است چون از هر دو والد ژن دریافت کرده است.

آل^۷: به اشکال مختلف یک ژن که در محل‌های یکسان بر روی کروموزوم‌های مشابه قرار می‌گیرند آل گفته می‌شود.

منوهیبرید^۸: هرگاه که آمیزش مربوط به فنوتیپ‌های مختلف یک صفت نباشد و تنها یک صفت خاص در آمیزش مورد مطالعه قرار گیرد آنرا اصطلاحاً منوهیبرید می‌نامند.

دی‌هیبرید^۹: زمانی که توارث دو صفت، در آمیزش‌ها مدنظر باشد این آمیزش را دی‌هیبرید می‌گویند.

قرارداد ۱.۴.۱. در مثال‌های آتی والدین را با حرف " P "، نسل‌ها را با " F " و عمل لقاح یا آمیزش را با " \otimes " نشان می‌دهیم.

در ادامه به نحوه‌ی انجام آزمایش‌های مندل پرداخته و با خلاصه کردن روش کارهای او در جدول‌هایی، خاصیت ابرساختار بودن آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

مثال ۲.۴.۱. مندل در آزمایشات خود چندین صفت مربوط به گیاه نخود فرنگی را مورد مطالعه قرار داد. برای مثال یکی از صفاتی که مندل مورد مطالعه قرار داد شکل دانه‌ها بود. او دو گیاه کاملاً خالص برای

^۱Genotype

^۲Dominance

^۳Pure-bred

^۴Dominant

^۵Recessive

^۶Hybrid

^۷Allele

^۸Mono-hybrid

^۹Di-hybrid

شکل دانه‌ها را با یکدیگر آمیزش داد که یکی از آنها دارای دانه‌های صاف و دیگری دارای دانه‌های چروکیده بود. زاده‌های بوجود آمده از آمیزش والدین خالص را نسل اول^۱ یا " F_1 " می‌نامند. در نسل اول تمام دانه‌ها صاف بودند بنابراین صفت صافی نسبت به صفت چروکیدگی غالب بود. سپس او به گیاهان نسل اول اجازه داد تا بین خودشان خود لقاحی انجام دهند تا نسل دوم^۲ یا " F_2 " بوجود آید. در نسل دوم بعضی از گیاهان دارای دانه‌های چروکیده و بقیه دارای دانه‌های صاف بودند. او دانه‌های صاف و چروکیده را شمارش کرد و مشاهده کرد که نسبت دانه‌های صاف به چروکیده ۳ به ۱ (۳ : ۱) است. نتایج حاصل از این آزمایش را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(ژنوتیپ rr) چروکیده \otimes (ژنوتیپ RR) صاف : P

↓

(ژنوتیپ Rr) همگی صاف : F_1

و

(ژنوتیپ Rr) صاف \otimes (ژنوتیپ Rr) صاف : $F_1 \otimes F_1$

↓

(ژنوتیپ rr) چروکیده, (ژنوتیپ Rr) صاف, (ژنوتیپ RR) صاف : F_2

برای سادگی صافی را " R " و چروکیدگی را " W " در نظر می‌گیریم. روند فوق را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد:

\otimes	R	W
R	R, W	R
W	R	W

حال اگر قرار دهیم $H = \{R, W\}$ آنگاه به راحتی ملاحظه می‌شود که (H, \otimes) یک ابرگروه است.

^۱First filial

^۲Second filial

با روشی مشابه با آزمایش فوق برای صفتهای زرد رنگی و سبز رنگی دانههای نخود فرنگی نیز نتیجه به همان صورت است که در زیر مشاهده می کنید. (در این آزمایش فرض بر این است که زردی صفت غالب است).

$$P : \text{سبز}(tt) \otimes \text{زرد}(TT)$$

↓

$$F_1 : \text{همگی زرد}(Tt)$$

و

$$F_1 \otimes F_1 : \text{زرد}(Tt) \otimes \text{زرد}(Tt)$$

↓

$$F_2 : \text{سبز}(tt), \text{زرد}(Tt), \text{زرد}(TT)$$

در اینجا نیز برای سادگی زرد رنگ بودن را "T" و سبز رنگ بودن را "D" در نظر می گیریم. برای آزمایش فوق نیز جدول زیر را داریم:

\otimes	T	D
T	T, D	T
D	T	D

فرض کنید $H = \{T, D\}$ در این صورت به راحتی ملاحظه می شود که (H, \otimes) یک ابرگروه است.

در ادامه مثالی از آمیزش دی هیبریدها را ارائه می کنیم. در اینجا کار کمی با مثالهای قبل متفاوت است، در واقع در این مرحله عمل آمیزش بین دو گونه نخود فرنگی که دارای دو صفت هستند انجام می گیرد. مطلبی که باید به آن اشاره کرد این است که تعداد صفات مورد مطالعه مهم نیستند و پایه و اساس آنالیزها، منو هیبرید است یعنی اگر آمیزش منو هیبرید را کاملاً فهمیده باشیم آنالیز دی هیبریدها بسیار سهل و آسان است. اولین آزمایشهای دی هیبرید را مندل انجام داد که نمونه ای از آن را در زیر بیان می کنیم.

مثال ۳.۴.۱. فرض کنید شکل دانه نخود بوسیله دو آلل " R " و " r " کنترل می‌شود. آلل " R " باعث ایجاد دانه‌های صاف و آلل " r " باعث ایجاد دانه‌های چروکیده می‌شود. آلل " T " باعث ایجاد رنگ زرد در دانه نخود می‌شود و نسبت به آلل " t " که باعث ایجاد رنگ سبز در دانه‌ها می‌شود غالب است. از آمیزش بین والدین خالص دانه زرد و صاف ($RRTT$) و دانه سبز و چروکیده ($ttrr$) گیاهانی با فنوتیپ دانه زرد و صاف ($RrTt$) در F_1 بوجود می‌آید. پس از آن مندل به نسل اول اجازه داد که با هم خودلقاحی انجام دهند و نسل دوم بوجود آید. از ۵۵۶ دانه بدست آمده او مشاهده کرد که ۳۱۵ دانه زرد و صاف، ۱۰۸ عدد صاف و سبز، ۱۰۱ عدد چروکیده و زرد و ۳۲ عدد آنها چروکیده و زرد هستند. این اعداد بسیار نزدیک به نسبت‌های ۹:۳:۳:۱ هستند که نسبت‌های دی‌هیبریدی نامیده می‌شوند. نحوه انجام این آزمایش را در زیر مشاهده می‌کنید:

P : $(rrtt)$ سبز و چروکیده \otimes $(RRTT)$ زرد و صاف

↓

F_1 : $(RrTt)$ همگی زرد و صاف

و

$F_1 \otimes F_1$: $(RrTt)$ زرد و صاف \otimes $(RrTt)$ زرد و صاف

↓

F_2 : $(rrtt)$ سبز و چروکیده، $(rrTT, rrTt)$ زرد و چروکیده، $(RRtt)$ سبز و صاف، $(RRTT)$ زرد و صاف

برای سادگی زرد و صاف را با A ، سبز و صاف را با B ، زرد و چروکیده را با C و سبز و چروکیده را با D نشان می‌دهیم بنابراین جدول زیر را خواهیم داشت:

\otimes	A	B	C	D
A	$ABCD$	$ABCD$	$ABCD$	$ABCD$
B	$ABCD$	BD	$ABCD$	BD
C	$ABCD$	$ABCD$	CD	CD
D	$ABCD$	BD	CD	D

فرض کنید $H = \{A, B, C, D\}$ ، در این صورت واضح است که (H, \otimes) یک ابرگروه است. از طرفی $H_0 = \{C, D\}$ نیز یک زیرابگروه H است.

در طبیعت گل‌های لاله عباسی با رنگ‌های متفاوتی وجود دارد. در اینجا نحوه‌ی آمیزش این نوع از گل‌ها را در مثالی مورد بررسی قرار می‌دهیم. لازم به ذکر است که تفاوتی که این مثال با مثال‌های قبلی دارد این است که صفت غالب و مغلوب بودن به غالبیت ناکامل یا جزئی^۱ تغییر می‌کند. به عبارت دیگر نسل بوجود آمده از آمیزش والدین با صفت خالص، دارای صفت غالب نیستند بلکه دارای صفتی مابین دو صفت موجود در والدین خود هستند. این تفاوت نیز باعث بوجود آمدن ابرساختارهای متفاوتی خواهد شد.

مثال ۴.۴.۱. یک گل لاله عباسی را با گلبرگ‌های قرمز (والد خالص) را با گل دیگری با گلبرگ‌های سفید (والد خالص) آمیزش می‌دهیم. در نسل اول تمام گل‌ها صورتی رنگ خواهند شد. حال اگر گل‌های صورتی را دوباره با گل‌های صورتی آمیزش دهیم گل‌های حاصل در نسل دوم با سه فنوتیپ بوجود می‌آیند که این فنوتیپ‌ها عبارتند از: سفید، صورتی و قرمز با نسبت‌های ۱:۲:۱ که متفاوت با نسبت ۳:۱ در مثال‌های قبل است. برای پی بردن به نحوه عملکرد این موضوع فرض کنید که R_1 نشان دهنده رنگدانه قرمز و R_2 نیز نشان دهنده رنگدانه سفید باشد. نحوه‌ی آمیزش گل‌های قرمز و سفید را در زیر مشاهده می‌کنید:

$$P: (R_1 R_1) \text{ سفید} \otimes (R_2 R_2) \text{ قرمز} :$$

↓

$$F_1: (R_1 R_2) \text{ همگی صورتی} :$$

$$F_1 \otimes F_1 : (R_1 R_1) \otimes (R_1 R_1) \text{ صورتی}$$

↓

$$F_2 : (R_1 R_1) \text{ سفید}, (R_1 R_2) \text{ صورتی}, (R_2 R_1) \text{ قرمز}$$

حال اگر گل قرمز را با R ، صورتی را با P و سفید را با W در نظر بگیریم جدول زیر را خواهیم داشت:

\otimes	R	P	W
R	R	R, P	P
P	R, P	R, P, W	R, P
W	P	R, P	W

فرض کنید $H = \{R, P, W\}$ بنابراین (H, \otimes) یک H_ν -نیم گروه است. برای مثال:

$$R \otimes (R \otimes W) = R \otimes P = \{R, P\}$$

و

$$(R \otimes R) \otimes W = R \otimes W = \{P\}$$

لذا $R \otimes (R \otimes W) \cap (R \otimes R) \otimes W \neq \emptyset$ از طرفی $R \otimes H \neq H$ ، در نتیجه (H, \otimes) یک H_ν -نیم گروه است.

جدول ۳.۱: برهم‌کنش بین لپتون‌ها با در نظر گرفتن پایداری اعداد لپتونی

\otimes	e	ν_e	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ	ν_μ	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ	ν_τ	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$
e	e	e, ν_e	L	$e, \bar{\nu}_e$ $\mu, \bar{\nu}_\mu$ $\tau, \bar{\nu}_\tau$	e, μ	e, ν_e μ, ν_μ	e, ν_e $\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	$e, \bar{\nu}_\tau$	e, τ e, ν_e	e, ν_e τ, ν_τ	e, ν_e $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$e, \bar{\nu}_\tau$
ν_e	e, ν_e	ν_e	e^+, ν_e μ^+, ν_μ τ^+, ν_τ	L	e, ν_e μ, ν_μ	ν_e, ν_μ	μ^+, ν_e	e, ν_e $\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	e, ν_e τ, ν_τ	ν_τ, ν_e	ν_e, τ^+	e, ν_e $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$
e^+	L	e^+, ν_e μ^+, ν_μ τ^+, ν_τ	e^+	$e^+, \bar{\nu}_e$	μ, ν_μ $e^+, \bar{\nu}_e$	e^+, ν_μ	e^+, μ^+	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $e^+, \bar{\nu}_e$	$e^+, \bar{\nu}_e$ τ, ν_τ	e^+, ν_τ	e^+, τ^+	$e^+, \bar{\nu}_e$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_e$	$e, \bar{\nu}_e$ $\mu, \bar{\nu}_\mu$ $\tau, \bar{\nu}_\tau$	L	$e^+, \bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_e$	$\mu, \bar{\nu}_e$	μ, ν_μ $e^+, \bar{\nu}_e$	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $e^+, \bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$	$\tau, \bar{\nu}_e$	$e^+, \bar{\nu}_e$ τ, ν_τ	$e^+, \bar{\nu}_e$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\tau$
μ	e, μ	e, ν_e μ, ν_μ	μ, ν_μ $e^+, \bar{\nu}_e$	$\mu, \bar{\nu}_e$	μ	μ, ν_μ	L	$e, \bar{\nu}_e$ $\mu, \bar{\nu}_\mu$ $\tau, \bar{\nu}_\tau$	μ, τ	τ, ν_τ μ, ν_μ	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$ μ, ν_μ	$\mu, \bar{\nu}_\tau$
ν_μ	e, ν_e μ, ν_μ	ν_e, ν_μ	e^+, ν_μ	μ, ν_μ $e^+, \bar{\nu}_e$	μ, ν_μ	ν_μ	e^+, ν_e μ^+, ν_μ τ^+, ν_τ	L	τ, ν_τ μ, ν_μ	ν_μ, ν_τ	τ^+, ν_μ	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$ μ, ν_μ
μ^+	e, ν_e $\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	μ^+, ν_e	e^+, μ^+	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $e^+, \bar{\nu}_e$	L	e^+, ν_e μ^+, ν_μ τ^+, ν_τ	μ^+	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ τ, ν_τ	μ^+, ν_τ	μ^+, τ^+	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_\mu$	$e, \bar{\nu}_\mu$	e, ν_e $\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $e^+, \bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ $e^+, \bar{\nu}_e$	$e, \bar{\nu}_e$ $\mu, \bar{\nu}_\mu$ $\tau, \bar{\nu}_\tau$	L	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\tau, \bar{\nu}_\mu$	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ τ, ν_τ	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau, \bar{\nu}_\mu$
τ	e, τ	e, ν_e τ, ν_τ	$e^+, \bar{\nu}_e$ τ, ν_τ	$\tau, \bar{\nu}_e$	μ, τ	τ, ν_τ μ, ν_μ	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ τ, ν_τ	$\tau, \bar{\nu}_\mu$	τ	τ, ν_τ	L	$e, \bar{\nu}_e$ $\mu, \bar{\nu}_\mu$ $\tau, \bar{\nu}_\tau$
ν_τ	e, ν_e τ, ν_τ	ν_τ, ν_e	e^+, ν_τ	$e^+, \bar{\nu}_e$ τ, ν_τ	τ, ν_τ μ, ν_μ	ν_μ, ν_τ	μ^+, ν_τ	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ τ, ν_τ	τ, ν_τ	ν_τ	e^+, ν_e μ^+, ν_μ τ^+, ν_τ	L
τ^+	e, ν_e $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	ν_e, τ^+	e^+, τ^+	$e^+, \bar{\nu}_e$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$ μ, ν_μ	τ^+, ν_μ	μ^+, τ^+	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	L	e^+, ν_e μ^+, ν_μ τ^+, ν_τ	τ^+	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_\tau$	$e, \bar{\nu}_\tau$	e, ν_e $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$e^+, \bar{\nu}_e$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\tau$	$\mu, \bar{\nu}_\tau$	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$ μ, ν_μ	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$ $\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau, \bar{\nu}_\mu$	$e, \bar{\nu}_e$ $\mu, \bar{\nu}_\mu$ $\tau, \bar{\nu}_\tau$	L	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$

منابع

- [1] Ameri, R., Hedayati, H. 2007. On fuzzy closed, invertible and reflexive subsets of hypergroups. Ital. J. Pure Appl. Math, 22: 95-114.