دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گرایش ریاضی محض

گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک مجموعه جزءمرتب

نگارش:
علی اکبر کمالی

استاد راهنما:
دکتر محمدرضا پورنکی

شهریور ۱۳۹۲

گراف مقسومٌ‌علیه‌های صفر یک مجموعه جزءً‌مرتب

چکیده

فرض کنید $(P, \preccurlyeq)$ یک مجموعه‌ی جزءً مرتب دارای عنصر صفر باشد و $S \subseteq P$. عنصر $x \in P$ را یک کران پایین برای S گوییم هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $x \preccurlyeq s$.
گراف ساده‌ی $G(P)$ را به P نسبت می‌دهیم به طوری که رئوس $G(P)$، اعضای P باشد و دو رأس x و y در $G(P)$ به وسیله‌ی یک یال به هم وصلند اگر و فقط اگر مجموعه‌ی کران پایین مجموعه‌ی $\{x, y\}$ در P، تنها شامل عنصر صفر باشد.
در این پایان‌نامه نشان خواهیم داد که اگر عدد رنگی و عدد خوشه‌ای گراف $G(P)$ (به ترتیب $\chi(G(P))$ و $\omega(G(P))$) متناهی باشند، برابر نیز خواهند بود و در اینصورت خواهیم داشت:

$$\chi(G(P)) = \omega(G(P)) = n + 1$$

که در آن، n، تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال P می‌باشد.

کلمات کلیدی: *رنگ‌آمیزی گراف، عدد رنگی، عدد خوشه‌ای، ایده‌آل، پوچساز، مجموعه جزءً‌مرتب*

فهرست مطالب

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

فرض‌کنیم R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد. به R، گراف ساده‌ی $G(R)$ را نسبت می‌دهیم که به اینصورت تعریف می‌شود: رأس‌های $G(R)$ همان اعضای R هستند و دو رأس x و y به وسیله‌ی یک یال به هم وصل هستند اگر و فقط اگر $x.y = ۰$. عددهای $\chi(G(R))$ و $\omega(G(R))$ به ترتیب عدد رنگی و عدد خوشه‌ای گراف $G(R)$ می‌باشند. واضح است که همواره داریم: $\chi(G(R)) \geqslant \omega(G(R))$. در این راستا، بِک [1] در [۱] حدس زده بود که برای هر حلقه‌ی جابجایی و یکدار R، داریم: $\chi(G(R)) = \omega(G(R))$. اما این حدس در [۲] توسط اندرسون [2] و نصیر [3] رد شد. آن‌ها ثابت کردند که برای حلقه‌ی جابجایی، یکدار و ۳۲ عضوی $R = \mathbb{Z}_۴[x, y, z]/\langle x^۲ - ۲, y^۲ - ۲, z^۲, ۲x, ۲y, ۲z, xy, xz, yz - ۲\rangle$ داریم:

$$۶ = \chi(G(R)) \gneqq \omega(G(R)) = ۵.$$

گراف مقسوم علیه صفر، یکی از ساختارهای جبری مهم است که مؤلفان و نویسندگان زیادی در حال مطالعه بر روی آن هستند. به غیر از گراف مقسوم علیه صفر حلقه، گراف مقسوم علیه صفر نیم گروه، گراف مقسوم علیه صفر مجموعه‌ی جزءً مرتب و گراف مقسوم علیه صفر مجموعه شبه مرتب نیز در مقالات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند که در آنها به موضوعاتی همچون عدد رنگی گراف، عدد خوشه‌ای گراف، کمر گراف، قطر گراف و شکل گراف از نظر مسطح بودن یا چند بخشی بودن و ... پرداخته شده‌است که می‌توان برای آشنایی بیشتر به [؟-؟] اشاره کرد.

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه، مطالعه‌ی گراف مقسوم علیه صفر مجموعه‌های جزءً مرتب است. نشان خواهیم داد که اگر عدد رنگی و عدد خوشه‌ای برای گراف مقسوم علیه صفر مجموعه‌ی جزءً مرتب با صفر P متناهی باشند، داریم:

$$\chi(G(P)) = \omega(G(P)) = n + ۱$$

که در آن، n، تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال P می‌باشد. در واقع تساوی فوق، حالت خاصی از حدس بِک را ثابت می‌کند.

در قسمت‌هایی از این پایان‌نامه، نشان می‌دهیم که برخی لم‌ها، قضایا و نتایج که برای مجموعه‌های جزءً مرتب داریم، برای مجموعه‌های شبه مرتب نیز برقرار بوده و اثبات‌های آنها با اندکی تفاوت، شبیه

---

[1] Beck
[2] D.D.Anderson
[3] M.Naseer

به هم هستند. در پایان شرایطی را معرفی می‌کنیم که تحت آن شرایط برای مجموعه‌ی جزءً مرتب P، $G(P)$ را نمی‌توان با تعداد متناهی رنگ، رنگ‌آمیزی کرد؛ در واقع: $\chi(G(P)) = \infty$.

فصل ۱
تعاریف و پیش‌نیازها

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه به کار برده می‌شود. بیشتر تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه به کار برده‌ایم از کتاب‌های "مقدمه‌ای بر نظریه گراف" اثر وست [۱] [۷] و "مقدمه‌ای بر شبکه‌ها و ترتیب" اثر داوی [۲] [۸] می‌باشند.

در بخش اول این فصل، تعاریف و پیش‌نیازهای مربوط به نظریه‌ی گراف، در بخش دوم، تعاریف و پیش‌نیازهای مربوط به مجموعه‌های جزءً مرتب و مجموعه‌های شبه مرتب و در بخش سوم، تعاریف و پیش‌نیازهای مربوط به گراف مقسومٌ‌علیه صفر آورده شده‌اند.

۱.۱ نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف ساده با n رأس که هر رأس آن به تمام رئوس دیگر متصل است را گراف کامل از مرتبه‌ی n می‌گوییم و با K_n نمایش می‌دهیم.

---
[۱] D.B. West
[۲] B.A. Davey

فصل ۲

ایده‌آل، عدد رنگی و عدد خوشه‌ای

مقدمه

هدف ما در این فصل، اثبات حالت خاصی از حدس بِک می‌باشد و در این راستا پس بیان چند مثال و چند لم، قضیه‌ی اصلی این پایان‌نامه که برابری عدد رنگی و عدد خوشه‌ای است را بیان می‌کنیم.

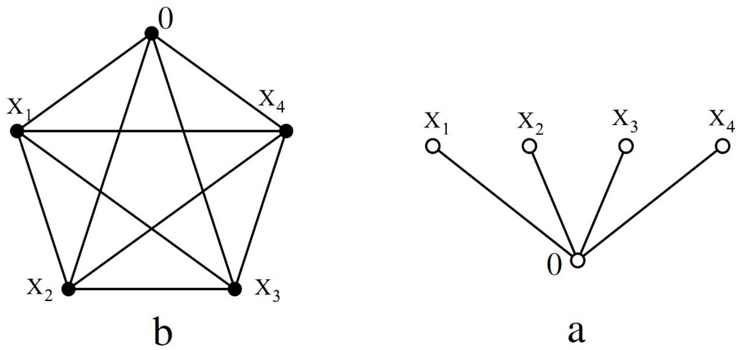
در بخش اول این فصل، برای درک بهتر تعاریفی که در فصل قبل بیان شد، چند مثال آورده‌ایم و در بخش دوم به هدف اصلی این پایان‌نامه که در فوق به آن اشاره شد می‌پردازیم. البته چون پایه و اساس این پایان‌نامه مربوط به مجموعه‌های جزءً مرتب است، مثال‌ها نیز در همین زمینه می‌باشند و از آوردن مثال‌های مربوط به مجموعه‌های شبه مرتب به دلیل شباهت زیاد به مجموعه‌های جزءً مرتب، پرهیز کرده‌ایم.

۱.۲ مثال‌ها

مثال ۱.۱.۲. فرض کنید $(P, \preccurlyeq)$ یک پوست باشد. عناصر P را به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$P = \{۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_n\} \quad , \quad ۰ \preccurlyeq x_i \quad (\forall i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}) \quad , \quad x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$$

برای $n = ۴$، دیاگرام هاس از پوست P و گراف $G(P)$ را در شکل ۱.۲ می‌توان دید. در واقع اگر دیاگرام هاس یک پوست به شکل ستاره باشد، گراف مقسومٌ علیه صفر آن یک گراف کامل است.



شکل ۲.۱: **(a)** دیاگرام هاس از پوست P ؛ **(b)** $G(P)$ در مثال ۲.۱.۱

فصل ۳
پوست‌های متممی توزیعی

مقدمه

در این فصل می‌خواهیم پوست‌هایی را معرفی کنیم که گراف مقسومٌ علیه صفر آنها را نمی‌توان به تعداد متناهی رنگ، رنگ‌آمیزی کرد ...

مراجع

[1] I. Beck, Coloring of a commutative ring, J. Algebra 116 (1988) 208–226.

[2] D.D. Anderson, M. Naseer, Beck's coloring of a commutative ring, J. Algebra 159 (1993) 500–514.

[3] D.F. Anderson, P. Livingstone, The zerodivisor graph of a commutative ring, J. Algebra 217 (1999) 434–447.

[4] M. Alizadeh, A.K. Dasb, H.R. Maimani, M.R. Pournaki, S. Yassemi, On the diameter and girth of zero-divisor graphs of posets, D.A. Mathematics 160 (2012) 1319–1324.

[5] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, When a zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph, J. Algebra 270 (2003) 169–180.

[6] S. Akbari, A. Mohammadian, On the zero-divisor graph of a commutative ring, J. Algebra 274 (2004) 847–855.

[7] D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 2001.

[8] B.A. Davey, H.A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 2002.

[9] H. Tverberg, On Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets, J. Combin. Theory 3 (1967) 305-306.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

خوشه . . . . clique

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

خوشه .... clique

Zero-divisor Graphs Of Partially Ordered Sets

Abstract

Let $(P, \preccurlyeq)$ be a partially ordered set (poset, briefly) with a least element 0 and $S \subseteq P$. An element $x \in P$ is a lower bound of S if $x \preccurlyeq s$ for all $s \in S$....

Keywords: *Coloring of a graph, Chromatic number, Clique number, Ideal, Annihilator, Poset*

Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

M.Sc.Thesis
Pure Mathematics

Zero-divisor Graphs Of Partially Ordered Sets

By
Ali Akbar Kamali

Supervisor
Dr. Mohammad Reza Pournaki

August , 2013