

## مسأله ۱

فرض کنید  $\{V_i\}_{i=0}^d$  و  $\{V_i^*\}_{i=0}^\delta$  دو تجزیه متفاوتی از فضای برداری  $V$  باشند و  $D$  و  $D^*$  زیر جبرهای جابجایی از  $\text{End}(V)$  باشند. مواردی را بررسی کنید که در شرایط ۱ تا ۵ زیر صدق می‌کنند.

۱.  $D$  یک مولد  $A_+$  دارد به طوری که برای هر  $0 \leq i \leq \delta$ ،  $A_+ V_i^* \subseteq V_0^* + \dots + V_{i+1}^*$ .
۲.  $D$  یک مولد  $A_-$  دارد به طوری که برای هر  $0 \leq i \leq \delta$ ،  $A_- V_i^* \subseteq V_{i-1}^* + \dots + V_\delta^*$ .
۳.  $D^*$  یک مولد  $A_+$  دارد به طوری که برای هر  $0 \leq i \leq d$ ،  $A_+ V_i \subseteq V_0 + \dots + V_{i+1}$ .
۴.  $D^*$  یک مولد  $A_-$  دارد به طوری که برای هر  $0 \leq i \leq d$ ،  $A_- V_i \subseteq V_{i-1} + \dots + V_d$ .
۵. زیرفضای  $W$  از  $V$  موجود نیست به طوری که  $DW \subseteq W$  و  $D^*W \subseteq W$  مگر اینکه  $W = V$  یا  $W = 0$ .