# انتگرال‌گیری عددی

....

۱۷ شهریور ۱۳۹۲

# فهرست

# مقدمه

قانون انتگرال‌گیری نامی است که به هر روش عددی جهت ارزیابی ، تخمین و حل انتگرال $If$ با یک تابع $f(s)$ اتلاق می‌شود:

## مقدمه

قانون انتگرال‌گیری نامی است که به هر روش عددی جهت ارزیابی ، تخمین و حل انتگرال $If$ با یک تابع $f(s)$ اتلاق می‌شود:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

# مقدمه

قانون انتگرال‌گیری نامی است که به هر روش عددی جهت ارزیابی ، تخمین و حل انتگرال $If$ با یک تابع $f(s)$ اتلاق می‌شود:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

که در آن $w(s)$ یك تابع وزن است.

# مقدمه

قانون انتگرال‌گیری نامی است که به هر روش عددی جهت ارزیابی ، تخمین و حل انتگرال $If$ با یک تابع $f(s)$ اتلاق می‌شود:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

که در آن $w(s)$ يك تابع وزن است.

ما تنها حالتی را که مجموعه نقاط برای تابع $f(s)$ درنقاط $\{\xi_i, i = 1, \ldots, N\}$ محدود شده، در نظر می‌گیریم و تخمین $Q$ به فرم زیر است:

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i) = If - Ef$$

ما تنها حالتی را که مجموعه نقاط برای تابع $f(s)$ درنقاط $\{\xi_i, i = 1, \ldots, N\}$ محدود شده، در نظر می‌گیریم و تخمین $Q$ به فرم زیر است:

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i) = If - Ef$$

که $Ef$ میزان خطا است.
نقاط $\{\xi_i, i = 1, \ldots, N\}$ را پایه و $\{w_i, i = 1, \ldots, N\}$ را وزن انتگرال می‌نامند.

ما تنها حالتی را که مجموعه نقاط برای تابع $f(s)$ درنقاط $\{\xi_i, i = 1, \ldots, N\}$ محدود شده، در نظر می‌گیریم و تخمین $Q$ به فرم زیر است:

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i) = If - Ef$$

که $Ef$ میزان خطا است.
نقاط $\{\xi_i, i = 1, \ldots, N\}$ را پایه و $\{w_i, i = 1, \ldots, N\}$ را وزن انتگرال می‌نامند.

- ضوابط زیادی برای انتخاب دستورهای انتگرال‌گیری مناسب وجود دارد از جمله:

- ضوابط زیادی برای انتخاب دستورهای انتگرال‌گیری مناسب وجود دارد از جمله:
- دستور انتگرال‌گیری بهینه باشد.یعنی $\sup |If - Qf|$ (خطا) مینیمم شود.

- ضوابط زیادی برای انتخاب دستورهای انتگرال‌گیری مناسب وجود دارد از جمله:

- دستور انتگرال‌گیری بهینه باشد.یعنی $\sup|If - Qf|$ (خطا) مینیمم شود.

- ملاک دیگر نابودی یا صفر کردن خطا است.

- ضوابط زیادی برای انتخاب دستورهای انتگرال‌گیری مناسب وجود دارد از جمله:
- دستور انتگرال‌گیری بهینه باشد.یعنی $\sup |If - Qf|$ (خطا) مینیمم شود.
- ملاک دیگر نابودی یا صفر کردن خطا است.
- معمولا دستورهای استفاده شده از نوع دوم می‌باشند.

- ضوابط زیادی برای انتخاب دستورهای انتگرال‌گیری مناسب وجود دارد از جمله:
- دستور انتگرال‌گیری بهینه باشد.یعنی $\sup|If - Qf|$ (خطا) مینیمم شود.
- ملاک دیگر نابودی یا صفر کردن خطا است.
- معمولا دستورهای استفاده شده از نوع دوم می‌باشند.

## ضرایب نامعین

فرض کنید $f(s) = \sum_{i=1}^{P} \alpha_i h_i(s)$ باشد. مجموعه $\{\xi_j, w_j, j = 1, \ldots, N\}$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$Ef = 0, \quad \forall \alpha_j$$

# ضرایب نامعین

فرض کنید $f(s) = \sum_{i=1}^{P} \alpha_i h_i(s)$ باشد. مجموعه $\{\xi_j, w_j, j = 1, \ldots, N\}$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$Ef = 0, \quad \forall \alpha_j$$

چون $I$ یک عملگر خطی است ، پس این رابطه برای تمامی $\alpha_j$ ها برقرار است و در این صورت $f(s) = h_k(s), k = 1, \ldots, P$ ، پس این رابطه معادل با $P$ شرط زیر است.

## ضرایب نامعین

فرض کنید $f(s)=\sum_{i=1}^{P}\alpha_i h_i(s)$ باشد. مجموعه $\{\xi_j, w_j, j=1,\dots,N\}$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$Ef=0, \quad \forall\alpha_j$$

چون I یک عملگر خطی است ، پس این رابطه برای تمامی $\alpha_j$ ها برقرار است و در این صورت $f(s)=h_k(s), k=1,\dots,P$ ، پس این رابطه معادل با $P$ شرط زیر است.

$$\sum_{j=1}^{N} w_j h_1(\xi_j)=m_1=\int_a^b w(s)h_1(s)ds$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j h_p(\xi_j)=m_p=\int_a^b w(s)h_p(s)ds$$

- دستگاه معادلات اخیر همان معادلات ضرایب نامعین هستند و $m_j$ نشانگر گشتاور تعمیم یافته تابع وزن $w(s)$ نسبت به مجموعه $\{h_i\}$ می‌باشد.

- دستگاه معادلات اخیر همان معادلات ضرایب نامعین هستند و $m_j$ نشانگر گشتاور تعمیم یافته تابع وزن $w(s)$ نسبت به مجموعه $\{h_i\}$ می‌باشد.

- این معادلات مجموعه‌ای است از $P$معادله خطی در نقطه نامعلوم $w_1, \ldots, w_N$.

- دستگاه معادلات اخیر همان معادلات ضرایب نامعین هستند و $m_j$ نشانگر گشتاور تعمیم یافته تابع وزن $w(s)$ نسبت به مجموعه $\{h_i\}$ می‌باشد.

- این معادلات مجموعه‌ای است از $P$معادله خطی در نقطه نامعلوم $w_1, \ldots, w_N$.

- اگر قرار دهیم $P = N$ دستگاه معادلات دارای جواب یکتا خواهد بود.

- دستگاه معادلات اخیر همان معادلات ضرایب نامعین هستند و $m_j$ نشانگر گشتاور تعمیم یافته تابع وزن $w(s)$ نسبت به مجموعه $\{h_i\}$ می‌باشد.

- این معادلات مجموعه‌ای است از $P$معادله خطی در نقطه نامعلوم $w_1, \dots, w_N$ .

- اگر قرار دهیم $P = N$ دستگاه معادلات دارای جواب یکتا خواهد بود.

## تعریف(شرط هار)

فرض کنید$\{h_i(s), i = 1 \ldots, N\}$ دنباله‌ای از توابع که دارای $N$ نقطه مجزای $\xi_j, j = 1, \ldots, N$ باشد به‌طوری‌که$\xi_L \leqslant \xi_j \leqslant \xi_U$ ،اگر ماتریس $M \times M$،

$\{h_i(\xi_j), i, j = 1, \ldots, M\}$ برای $M \leqslant N$ نامنفرد باشد در این صورت مجموعه $h_i(s)$ که در شرط هار گفته می‌شود در بازه$[\xi_L, \xi_U]$ صدق می‌کند.

# قضیه(هار)

فرض کنید $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,N}$ مجموعه‌ای از نقطه $N$ مجزا باشد که $a \leqslant \xi_i \leqslant b$ ونیز

فرض کنید$\{h_i(s), i = 1, \dots, N\}$ در شرط هار روی $[a, b]$ صدق کند پس
دستگاه ضرایب نامعین به ازای $P = N$دارای جواب یکتاست.

## مثال

فرض کنید $h_i(s) = s^{i-1}$ و
$[a, b] = [0, h], w(s) = 1, N = 2, \xi_1 = 0, \xi_2 = h$ معادلات ضرایب نامعین
را به‌دست می‌آوریم.

# مثال

فرض کنید $h_i(s) = s^{i-1}$ و
معادلات ضرایب نامعین$[a, b] = [0, h], w(s) = 1, N = 2, \xi_1 = 0, \xi_2 = h$
را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا نشان می‌دهیم $h_i(s) = s^{i-1}$در شرط هار صدق می‌کند .

$$h_1(s) = 1$$

$$h_2(s) = s$$

# مثال

فرض کنید $h_i(s) = s^{i-1}$ و
$[a, b] = [0, h], w(s) = 1, N = 2, \xi_1 = 0, \xi_2 = h$معادلات ضرایب نامعین
را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا نشان می‌دهیم $h_i(s) = s^{i-1}$در شرط هار صدق می‌کند .

$$h_1(s) = 1$$

$$h_2(s) = s$$

ماتریس ضرایب این دستگاه عبارت است از:

# مثال

فرض کنید $h_i(s)=s^{i-1}$ و
$[a,b]=[0,h], w(s)=1, N=2, \xi_1=0, \xi_2=h$معادلات ضرایب نامعین
را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا نشان می‌دهیم $h_i(s)=s^{i-1}$در شرط هار صدق می‌کند .

$$h_1(s)=1$$

$$h_2(s)=s$$

ماتریس ضرایب این دستگاه عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} h_1(\xi_1) & h_1(\xi_2) \\ h_2(\xi_1) & h_2(\xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه $h \neq 0$ است.پس ماتریس فوق نامنفرد است و
درشرط هار صدق می‌کند.

# ادامه مثال

$$w_1 + w_2 = \int_0^h 1.ds = h,$$

$$0 + w_2 h = \int_0^h s ds = \frac{h^2}{2},$$

## ادامه مثال

$$w_1 + w_2 = \int_0^h 1.ds = h,$$

$$0 + w_2 h = \int_0^h s ds = \frac{h^2}{2},$$

بنابراین$w_1 = w_2 = h/2$ و انتگرال ذوزنقه‌ای زیر به‌دست می‌آید:

# ادامه مثال

$$w_1 + w_2 = \int_0^h 1.ds = h,$$

$$0 + w_2 h = \int_0^h s ds = \frac{h^2}{2},$$

بنابراین $w_1 = w_2 = h/2$ و انتگرال ذوزنقه‌ای زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_0^h f(s)ds \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)]$$

فرض کنیم دو پایه $\{h_1, \ldots, h_N\}$ و $\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_N\}$ داریم که فضا را تشکیل می‌دهند در این‌صورت تابع $f(s)$ را می‌توان نسبت به هر دو پایه بسط داد یعنی:

فرض کنیم دو پایه $\{h_1, \dots, h_N\}$ و $\{\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_N\}$ داریم که فضا را تشکیل می‌دهند در این‌صورت تابع $f(s)$ را می‌توان نسبت به هر دو پایه بسط داد یعنی:

$$f(s) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j h_j(s) = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \bar{h}_j(s).$$

$$\int_a^b w(s) f(s) ds = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \int_a^b w(s) \bar{h}_j(s) ds = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \sum_{j=1}^{N} w_i \bar{h}_j(\xi_i),$$

فرض کنیم دو پایه $\{h_1, \ldots, h_N\}$ و $\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_N\}$ داریم که فضا را تشکیل می‌دهند در این‌صورت تابع $f(s)$ را می‌توان نسبت به هر دو پایه بسط داد یعنی:

$$f(s) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j h_j(s) = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \bar{h}_j(s).$$

$$\int_a^b w(s) f(s) ds = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \int_a^b w(s) \bar{h}_j(s) ds = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \sum_{j=1}^{N} w_i \bar{h}_j(\xi_i),$$

$$\int_a^b w(s) \bar{h}_j(s) ds = \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{h}_j(\xi_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

فرض کنیم دو پایه $\{h_1, \ldots, h_N\}$ و $\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_N\}$ داریم که فضا را تشکیل می‌دهند در این‌صورت تابع $f(s)$ را می‌توان نسبت به هر دو پایه بسط داد یعنی:

$$f(s) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j h_j(s) = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \bar{h}_j(s).$$

$$\int_a^b w(s) f(s) ds = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \int_a^b w(s) \bar{h}_j(s) ds = \sum_{j=1}^{N} \bar{\alpha}_j \sum_{j=1}^{N} w_i \bar{h}_j(\xi_i),$$

$$\int_a^b w(s) \bar{h}_j(s) ds = \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{h}_j(\xi_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

# دستورات تکراری

در این روش هدف به‌دست آوردن دستور انتگرال‌گیری $N$ نقطه‌ای برای تقریب انتگرال $\int_a^b f(s)ds$ است، اگر بازه انتگرال‌گیری بزرگ باشد در این صورت بازه را به $M$ قسمت تقسیم می‌کنیم داریم:

# دستورات تکراری

در این روش هدف به‌دست آوردن دستور انتگرال‌گیری $N$ نقطه‌ای برای تقریب انتگرال $\int_a^b f(s)ds$ است، اگر بازه انتگرال‌گیری بزرگ باشد در این صورت بازه را به $M$ قسمت تقسیم می‌کنیم داریم:

$$h = \frac{(b-a)}{M};$$

# دستورات تکراری

در این روش هدف به‌دست آوردن دستور انتگرال‌گیری $N$ نقطه‌ای برای تقریب انتگرال $\int_a^b f(s)ds$ است، اگر بازه انتگرال‌گیری بزرگ باشد در این صورت بازه را به $M$ قسمت تقسیم می‌کنیم داریم:

$$h = \frac{(b-a)}{M};$$

$$\begin{aligned} If = \int_a^b f(s)ds &= \sum_{j=1}^{M} \int_{a+(j-1)h}^{a+jh} f(s)ds \\ &= \sum_{j=1}^{M} Q_N(a+(j-1)h, a+jh)f + E_{N,M}(f). \end{aligned}$$

قضیه : با توجه به رابطه اخیر برای هر $N$ ثابت، و به ازای هر انتگرال ریمان تابع $f$ روی بازه $(a, b)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{M\to\infty} E_{N,M}(f) = 0$$

قضیه : با توجه به رابطه اخیر برای هر $N$ ثابت، و به ازای هر انتگرال ریمان تابع $f$ روی بازه $(a, b)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{M\to\infty} E_{N,M}(f) = 0$$

یعنی هرچه تعداد تقسیمات بیشتر باشد خطا به سمت صفر میل می‌کند.

# دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم

# دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم.
چندجمله‌ای‌های متعامد یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

# دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم.
چندجمله‌ای‌های متعامد یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_i(s) = q_{i-1}(s),$$

## دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم.
چندجمله‌ای‌های متعامد یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_i(s) = q_{i-1}(s),$$

حال نقاط $\xi_i, i = 1, \ldots, N$ را به عنوان صفرهای $q_N(s)$ انتخاب می‌کنیم :

# دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم.
چندجمله‌ای‌های متعامد یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_i(s) = q_{i-1}(s),$$

حال نقاط $\xi_i, i = 1, \ldots, N$ را به عنوان صفرهای $q_N(s)$ انتخاب می‌کنیم :

$$q_N(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

# دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم.
چندجمله‌ای‌های متعامد یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_i(s) = q_{i-1}(s),$$

حال نقاط $\xi_i, i = 1, \ldots, N$ را به عنوان صفرهای $q_N(s)$ انتخاب می‌کنیم :

$$q_N(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

ازطرفی وزن‌های $w_j, j = 1, \ldots, N$ در $N$ معادله اول دستگاه ضرایب نامعین صدق می‌کنند بنابراین داریم:

## دستور گاوس

در این روش اگر علاوه بر $w_i$ها $\xi_i$ هم متغیر هستند در نتیجه $2N$ متغیر داریم.
چندجمله‌ای‌های متعامد یکه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_i(s) = q_{i-1}(s),$$

حال نقاط $\xi_i, i = 1, \ldots, N$ را به عنوان صفرهای $q_N(s)$ انتخاب می‌کنیم :

$$q_N(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

ازطرفی وزن‌های $w_j, j = 1, \ldots, N$ در $N$ معادله اول دستگاه ضرایب نامعین صدق می‌کنند بنابراین داریم:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j q_k(\xi_j) = \int_a^b w(s) q_k(s) ds, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

# گاوس_لژاندر

این روش ساده‌ترین و احتمالا معروف‌ترین دستور گاوس با تابع وزن $w(s) = 1$ روی بازه$[-1, 1]$ می‌باشد. چندجمله‌ای‌های لژاندر(نرمال شده) از رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

$$q_i(s) = \left(\frac{2i+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} p_i(s), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

# گاوس_لژاندر

این روش ساده‌ترین و احتمالا معروف‌ترین دستور گاوس با تابع وزن $w(s) = 1$ روی بازه $[-1, 1]$ می‌باشد. چندجمله‌ای‌های لژاندر(نرمال شده) از رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

$$q_i(s) = \left(\frac{2i+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} p_i(s), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

دستور گاوس_لژاندر $N$ نقطه‌ای برای تمام چندجمله‌ای‌های از درجه $2N-1$ دقیق است.

# مثال

برای $h_i(s) = s^{i-1}$; به دنبال یک قاعده دو نقطه‌ای از درجه ۳ با وزن $w(s) = 1$ روی بازه $[-1, 1]$ هستیم. $2N$ معادلات ضرایب نامعین به‌صورت زیر هستند:

## مثال

برای $h_i(s) = s^{i-1}$ ; به دنبال یک قاعده دو نقطه‌ای از درجه ۳ با وزن $w(s) = 1$ روی بازه $[-1, 1]$ هستیم. $2N$ معادلات ضرایب نامعین به‌صورت زیر هستند:

$$\int_{-1}^{1} h_i(s)ds = \sum_{j=1}^{2} w_j h_i(\xi_j), \qquad i = 1, \dots, 4$$

$$w_1 + w_2 = 2,$$

$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = 0,$$

$$w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \frac{2}{3},$$

$$w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0.$$

این دستگاه دارای جواب یکتاست.

$$w_1 = 1 = w_2; \quad \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

این دستگاه دارای جواب یکتاست.

$$w_1 = 1 = w_2; \quad \xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

و فرمول گاوس دونقطه‌ای زیر به‌دست می‌آید.

$$\int_{-1}^{1} f(s)ds \approx f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

# گاوس-چبیشف باز وبسته

در این روش تابع وزن و بازه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

## گاوس‌ـچبیشف باز وبسته

در این روش تابع وزن و بازه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}; (a, b) = (-1, 1)$$

# گاوس_چبیشف باز وبسته

در این روش تابع وزن و بازه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}; (a,b) = (-1,1)$$

چندجمله‌ای‌های نرمال شده چبیشف یعنی $q_i(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

# گاوس_چبیشف باز وبسته

در این روش تابع وزن و بازه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}; (a, b) = (-1, 1)$$

چندجمله‌ای‌های نرمال شده چبیشف یعنی $q_i(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q_i(s) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_i(s) & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_0(s) & i = 0. \end{cases}$$

# گاوس_چبیشف باز وبسته

در این روش تابع وزن و بازه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}; (a, b) = (-1, 1)$$

چندجمله‌ای‌های نرمال شده چبیشف یعنی $q_i(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q_i(s) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_i(s) & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_0(s) & i = 0. \end{cases}$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف و توابع وزن به‌ترتیب از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

# گاوس_چبیشف باز وبسته

در این روش تابع وزن و بازه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}; (a,b) = (-1,1)$$

چندجمله‌ای‌های نرمال شده چبیشف یعنی $q_i(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q_i(s) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_i(s) & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_0(s) & i = 0. \end{cases}$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف و توابع وزن به‌ترتیب از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\xi_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

$$w_i = \frac{\pi}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

دستور انتگرال‌گیری چبیشف باز تعمیمی از قاعده نقطه میانی است. به این‌صورت‌که:

$$\int_a^b f(s)ds \approx h \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2}\right), \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

دستور انتگرال‌گیری چبیشف باز تعمیمی از قاعده نقطه میانی است. به این‌صورت‌که:

$$\int_a^b f(s)ds \approx h \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2}\right), \quad h = \frac{b-a}{N}$$

اگر قرار دهیم $(a, b) = (0, \pi)$ و متغیر $s$ را به $s = \cos\theta$ تغییر متغیر دهیم، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(\cos^{-1}s)}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} ds \approx \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right).$$

دستور انتگرال‌گیری چبیشف باز تعمیمی از قاعده نقطه میانی است. به این‌صورت‌که:

$$\int_a^b f(s)ds \approx h\sum_{i=1}^{N} f\left(a+(2i-1)\frac{h}{2}\right), \qquad h=\frac{b-a}{N}$$

اگر قرار دهیم $(a,b)=(0,\pi)$ و متغیر $s$ را به $s=\cos\theta$ تغییر متغیر دهیم، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(\cos^{-1}s)}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}ds \approx \frac{\pi}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right).$$

اگر براي تابع وزن $w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ و بازه $(a, b) = (-1, 1)$ نقاط انتهائی را به‌صورت $\xi_0 = 1, \xi_N = -1$ در نظر بگیریم، برای هر مقدار $N$ می‌توانیم یک رابطه $N + 1$ نقطه‌ای از درجه $2N - 1$ که به دستور گاوس ـ چبیشف بسته معروف است ایجاد کنیم.

اگر براي تابع وزن $w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ و بازه $(a, b) = (-1, 1)$ نقاط انتهائی را به‌صورت$\xi_0 = 1, \xi_N = -1$ در نظر بگیریم، برای هر مقدار$N$ می‌توانیم یک رابطه $N + 1$ نقطه‌ای از درجه$2N - 1$ که به دستور گاوس ـ چبیشف بسته معروف است ایجاد کنیم. با نقاط

$$\xi_i = \cos(\frac{i\pi}{N}), \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

اگر براي تابع وزن $w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ و بازه $(a, b) = (-1, 1)$ نقاط انتهائی را به‌صورت $\xi_0 = 1, \xi_N = -1$ در نظر بگیریم، برای هر مقدار$N$ می‌توانیم یک رابطه $N+1$ نقطه‌ای از درجه$2N-1$ که به دستور گاوس ـ چبیشف بسته معروف است ایجاد کنیم. با نقاط

$$\xi_i = \cos(\frac{i\pi}{N}), \quad i = 0, 1, \ldots, N$$

با وزن‌های

$$w_i = \pi/N, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$w_0 = w_N = \frac{\pi}{2N},$$

اگر براي تابع وزن $w(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ و بازه $(a, b) = (-1, 1)$ نقاط انتهائی را به‌صورت$\xi_0 = 1, \xi_N = -1$ در نظر بگیریم، برای هر مقدار$N$ می‌توانیم یک رابطه $N + 1$ نقطه‌ای از درجه$2N - 1$ که به دستور گاوس ـ چبیشف بسته معروف است ایجاد کنیم. با نقاط

$$\xi_i = \cos(\frac{i\pi}{N}), \quad i = 0, 1, \ldots, N$$

با وزن‌های

$$w_i = \pi/N, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$w_0 = w_N = \frac{\pi}{2N},$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(s)ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^{N}{}'' f\left(\cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right)\right),$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(s)ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^{N}{}'' f\left(\cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right)\right),$$

که علامت دابل پرایم بر علامت جمع نشان دهنده این است که عبارت‌های اول و آخر نصف شده‌اند.

- تفاوت بین عملکرد دستورات باز وبسته چبیشف:

- تفاوت بین عملکرد دستورات باز وبسته چبیشف:

- تفاوت بین عملکرد دستورات باز وبسته چبیشف:

- گاهی اوقات محاسبه مقادیر در نقاط پایانی یعنی $f(1)$, $f(-1)$،نامناسب یا غیرممکن است، اما دستورات باز استفاده از این نقاط را فراهم می‌کند.

- تفاوت بین عملکرد دستورات باز وبسته چبیشف:
- گاهی اوقات محاسبه مقادیر در نقاط پایانی یعنی $f(1)$, $f(-1)$،نامناسب یا غیرممکن است، اما دستورات باز استفاده از این نقاط را فراهم می‌کند.

- تفاوت بین عملکرد دستورات باز وبسته چبیشف:

- گاهی اوقات محاسبه مقادیر در نقاط پایانی یعنی$f(-1), f(1)$،نامناسب یا غیرممکن است، اما دستورات باز استفاده از این نقاط را فراهم می‌کند.

- با انجام یك سری محاسبات، با دو برابر نمودن $N$، قانون بسته این ویژگی را دارند که نقاط $\xi_i^N$ زیرمجموعه‌ای از نقاط $\xi_i^{2N}$ هستند، بنابراین توابع محاسبه شده را می‌توان دوباره مورد استفاده قرار داد،در صورتی‌که این مطلب برای دستور باز برقرار نیست.

- تفاوت بین عملکرد دستورات باز وبسته چبیشف:

- گاهی اوقات محاسبه مقادیر در نقاط پایانی یعنی $f(-1)$, $f(1)$،نامناسب یا غیرممکن است، اما دستورات باز استفاده از این نقاط را فراهم می‌کند.

- با انجام یك سری محاسبات، با دو برابر نمودن $N$، قانون بسته این ویژگی را دارند که نقاط $\xi_i^N$ زیرمجموعه‌ای از نقاط $\xi_i^{2N}$ هستند، بنابراین توابع محاسبه شده را می‌توان دوباره مورد استفاده قرار داد،در صورتی‌که این مطلب برای دستور باز برقرار نیست.

## مثال

مقدار دقیق انتگرال زیر را با به‌کاربردن قاعده چبیشف باز و بسته برای $N = 2$ پیدا می‌کنیم

# مثال

مقدار دقیق انتگرال زیر را با به‌کاربردن قاعده چبیشف باز و بسته برای $N = 2$ پیدا می‌کنیم

$$\int_{-1}^{1} \frac{s^2 ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$$

# مثال

مقدار دقیق انتگرال زیر را با به‌کاربردن قاعده چبیشف باز و بسته برای $N = 2$ پیدا می‌کنیم

$$\int_{-1}^{1} \frac{s^2 ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$$

۱) گاوس-چبیشف باز برای $T_2(s) = 2s^2 - 1$ و صفرهای $T_2(s)$، $\xi_1 = -(1/\sqrt{2}), \xi_2 = (1/\sqrt{2})$ هستند

# مثال

مقدار دقیق انتگرال زیر را با به‌کاربردن قاعده چبیشف باز و بسته برای $N = 2$ پیدا می‌کنیم

$$\int_{-1}^{1} \frac{s^2 ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}$$

۱) گاوس-چبیشف باز برای$T_2(s) = 2s^2 - 1$ و صفرهای $T_2(s)$، $\xi_1 = -(1/\sqrt{2}), \xi_2 = (1/\sqrt{2})$ هستند و

$$\frac{\pi}{2}[(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}] = \frac{\pi}{2}.$$

## ادامه مثال

۲) گاوس-چبیشف بسته، نقاط انتگرال‌گیری به صورت زیر هستند

۲) گاوس ـ چبیشف بسته ،نقاط انتگرال‌گیری به صورت زیر هستند

$$\xi_0 = \cos\frac{0\pi}{2}, \quad \xi_1 = \cos\frac{\pi}{2}, \quad \xi_2 = \cos\frac{2\pi}{2},$$

# ادامه مثال

۲) گاوس‌ـچبیشف بسته ،نقاط انتگرال‌گیری به صورت زیر هستند

$$\xi_0 = \cos\frac{0\pi}{2}, \quad \xi_1 = \cos\frac{\pi}{2}, \quad \xi_2 = \cos\frac{2\pi}{2},$$

که:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = -1.$$

## ادامه مثال

۲) گاوس‌ـچبیشف بسته ،نقاط انتگرال‌گیری به صورت زیر هستند

$$\xi_0 = \cos\frac{0\pi}{2}, \quad \xi_1 = \cos\frac{\pi}{2}, \quad \xi_2 = \cos\frac{2\pi}{2},$$

که:

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = -1.$$

انتگرال دقیق آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\pi}{2}[\frac{1}{2}(1)^2 + (0)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2] = \frac{\pi}{2}$$

اگر $f(s)$ در نزدیکی‌های $s=\pm 1$ هموار باشد، $\bar{f}(s)$ هموار نیست، در این صورت استفاده مستقیم قاعده گاوس ـ چبیشف برای

$$If=\int_{-1}^{1} f(s)ds=\int_{-1}^{1}\frac{\bar{f}(s)ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}},$$

که $\bar{f}(s)=(1-s^2)^{\frac{1}{2}}f(s)$ نتایجی را حاصل می‌کند که با افزایش $N$ همگرایی بسیار کندی دارد . با استفاده از دستور کلنشاو ـ کورتس می‌توان از این همگرایی بسیار کند جلوگیری کنیم.

فرض کنید که بسط چبیشف تابع $f(s)$ به‌صورت زیر است :

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' b_i T_i(s),$$

فرض کنید که بسط چبیشف تابع $f(s)$ به‌صورت زیر است :

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' b_i T_i(s),$$

حال ضرایب $b_i$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

فرض کنید که بسط چبیشف تابع $f(s)$ به‌صورت زیر است :

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' b_i T_i(s),$$

حال ضرایب $b_i$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$b_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(s) T_i(s)}{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

فرض کنید که بسط چبیشف تابع $f(s)$ به‌صورت زیر است :

$$f(s) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' b_i T_i(s),$$

حال ضرایب $b_i$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$b_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(s) T_i(s)}{(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

با ارزیابی عددی رابطه اخیر با قاعده گاوس ـ چبیشف بسته، تقریب زیر را به‌دست می‌آوریم:

با ارزیابی عددی رابطه اخیر با قاعده گاوس ـچبیشف بسته، تقریب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$b_i \approx a_i^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{k\pi}{N})\cos\frac{ik\pi}{N}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N,$$

با ارزیابی عددی رابطه اخیر با قاعده گاوس ـ چبیشف بسته، تقریب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$b_i \approx a_i^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{k\pi}{N})\cos\frac{ik\pi}{N}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N,$$

رابطه کلنشاوـ کورتس دارای مراحل زیر می‌باشد

با ارزیابی عددی رابطه اخیر با قاعده گاوس ـچبیشف بسته، تقریب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$b_i \approx a_i^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{k\pi}{N})\cos\frac{ik\pi}{N}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N,$$

رابطه کلنشاوـکورتس دارای مراحل زیر می‌باشد:

۱) محاسبه $a_i^{(N)}, i = 0, \ldots, N$

با ارزیابی عددی رابطه اخیر با قاعده گاوس ـ چبیشف بسته، تقریب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$b_i \approx a_i^{(N)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{k\pi}{N})\cos\frac{ik\pi}{N}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N,$$

رابطه کلنشاو ـ کورتس دارای مراحل زیر می‌باشد:

۱) محاسبه $a_i^{(N)}, i = 0, \ldots, N$

۲) $\int_{-1}^{1} f(s)ds = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{N}{}'' 2a_n^{(N)}/(1-n^2)$

## برآورد خطا در روش‌های انتگرال‌گیری عددی

حال به برآورد خطاهای یک دستور انتگرال‌گیری مانند $Q$ می‌پردازیم.فرض کنیم $\{h_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه برای تابع $f(s)$باشد داریم:

## برآورد خطا در روش‌های انتگرال‌گیری عددی

حال به برآورد خطاهای یک دستور انتگرال‌گیری مانند $Q$ می‌پردازیم.فرض کنیم $\{h_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه برای تابع $f(s)$باشد داریم:

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i h_i(s).$$

$$Ef = (I - Q)f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i Eh_i$$

$$= \sum_{i=P+1}^{\infty} b_i Eh_i,$$

آخرین نتیجه حاصل از $Eh_i = 0, i = 1, \ldots, P$ می‌باشد. بنابراین داریم؛

$$|Ef| = \left| \sum_{i=P+1}^{\infty} b_i Eh_i \right| \leqslant \sum_{i=P+1}^{\infty} |b_i||Eh_i|$$

حال به برآورد خطاهای یک دستور انتگرال‌گیری مانند $Q$ می‌پردازیم.فرض کنیم $\{h_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه برای تابع $f(s)$ باشد داریم:

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i h_i(s).$$

$$Ef = (I - Q)f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i Eh_i$$

$$= \sum_{i=P+1}^{\infty} b_i Eh_i,$$

آخرین نتیجه حاصل از $Eh_i = 0, i = 1, \ldots, P$ می‌باشد. بنابراین داریم؛

$$|Ef| = \left| \sum_{i=P+1}^{\infty} b_i Eh_i \right| \leqslant \sum_{i=P+1}^{\infty} |b_i||Eh_i|$$

## قضیه(پئانو)

در نظر بگیرید:

## قضیه (پئانو)

در نظر بگیرید:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

## قضیه (پئانو)

در نظر بگیرید:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

و دستور انتگرال‌گیری N نقطه‌ای زیر

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

## قضیه (پئانو)

در نظر بگیرید:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

و دستور انتگرال‌گیری $N$ نقطه‌ای زیر

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

فرض کنید که $Qf$ برای چندجمله‌ای‌های $P_n$ از درجه کوچکتر یا مساوی $p$ دقیق باشد یعنی:

# قضیه (پئانو)

در نظر بگیرید:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

و دستور انتگرال‌گیری $N$ نقطه‌ای زیر

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

فرض کنید که $Qf$ برای چندجمله‌ای‌های $P_n$ از درجه کوچکتر یا مساوی $p$ دقیق باشد یعنی:

$$Ef = (I - Q)P_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p$$

# قضیه(پئانو)

در نظر بگیرید:

$$If = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

و دستور انتگرال‌گیری $N$ نقطه‌ای زیر

$$Qf = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i)$$

فرض کنید که$Qf$ برای چندجمله‌ای‌های $P_n$ از درجه کوچکتر یا مساوی $p$ دقیق باشد یعنی:

$$Ef = (I - Q)P_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, p$$

## ادامه قضیه

علاوه برآن فرض می‌کنیم که $f(s)$ تا مرتبه $q$ دارای مشتقات پیوسته باشد،و یک مشتق قطعه به قطعه پیوسته از مرتبه $q+1$ داشته باشد، $r = \min(p, q)$ سپس

## ادامه قضیه

علاوه برآن فرض می‌کنیم که $f(s)$ تا مرتبه $q$ دارای مشتقات پیوسته باشد،و یک مشتق قطعه به قطعه پیوسته از مرتبه $q+1$ داشته باشد، $r=\min(p,q)$ سپس

$$|Ef| \leqslant \frac{M^{(r+1)}}{r!} K_r$$

$$K_r = \int_a^b |E_s[(s-t)_+^r]| dt$$

$$M^{(i)} = \sup_{a \leqslant s \leqslant b} |f^i(s)|$$

## ادامه قضیه

علاوه برآن فرض می‌کنیم که $f(s)$ تا مرتبه $q$ دارای مشتقات پیوسته باشد،و یک مشتق قطعه به قطعه پیوسته از مرتبه $q+1$ داشته باشد، $r=\min(p,q)$ سپس

$$|Ef| \leqslant \frac{M^{(r+1)}}{r!} K_r$$

$$K_r = \int_a^b |E_s[(s-t)_+^r]| dt$$

$$M^{(i)} = \sup_{a \leqslant s \leqslant b} |f^i(s)|$$

$$(s)_+^m = s^m, \quad s \geqslant 0$$
$$= 0, \quad s < 0$$

## ادامه قضیه

علاوه برآن فرض می‌کنیم که $f(s)$ تا مرتبه $q$ دارای مشتقات پیوسته باشد،و یک مشتق قطعه به قطعه پیوسته از مرتبه $q+1$ داشته باشد، $r=\min(p,q)$ سپس

$$|Ef| \leqslant \frac{M^{(r+1)}}{r!} K_r$$

$$K_r = \int_a^b |E_s[(s-t)_+^r]| dt$$

$$M^{(i)} = \sup_{a \leqslant s \leqslant b} |f^i(s)|$$

$$\begin{aligned} (s)_+^m &= s^m, \quad s \geqslant 0 \\ &= 0, \quad s < 0 \end{aligned}$$

انتگرال $k_r$ را هسته پئانو و عملگر $E_s$ به خطا در انتگرالگیری روی $s$ اشاره دارد.

# اثبات

طبق بسط تیلور داریم :

$$f(s) = f(a) + f'(a)(s-a) + \ldots + \frac{f^r(a)}{r!}(s-a)^r + \frac{1}{r!}\int_a^s f^{(r+1)}(t)(s-t)^r dt$$

جمله آخر $R$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$R = \frac{1}{r!}\int_a^b f^{(r+1)}(t)(s-t)_+^r dt$$

# ادامه اثبات

حال اگر اپراتور خطی $I - Q = E$ را به هر دو سمت معادله اعمال کنیم. سپس داریم

$$Ef = \frac{1}{r!} E \int_a^b f^{(r+1)}(t)(s-t)_+^r dt$$

# ادامه اثبات

حال اگر اپراتور خطی $I - Q = E$ را به هر دو سمت معادله اعمال کنیم. سپس داریم

$$Ef = \frac{1}{r!} E \int_a^b f^{(r+1)}(t)(s-t)_+^r dt$$

$$Ef = \frac{1}{r!} \int_a^b f^{(r+1)}(t) E_s (s-t)_+^r dt$$

## ادامه اثبات

حال اگر اپراتور خطی $I - Q = E$ را به هر دو سمت معادله اعمال کنیم. سپس داریم

$$Ef = \frac{1}{r!} E \int_a^b f^{(r+1)}(t)(s-t)_+^r dt$$

$$Ef = \frac{1}{r!} \int_a^b f^{(r+1)}(t) E_s (s-t)_+^r dt$$

چون $E_s(s-t)_+^r$ علامت ثابت دارد طبق قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها داریم :

$$Ef = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{r!} \int_a^b E_s(s-t)_+^r dt$$

# ادامه اثبات

حال اگر اپراتور خطی $I - Q = E$ را به هر دو سمت معادله اعمال کنیم. سپس داریم

$$Ef = \frac{1}{r!} E \int_a^b f^{(r+1)}(t)(s-t)_+^r dt$$

$$Ef = \frac{1}{r!} \int_a^b f^{(r+1)}(t) E_s (s-t)_+^r dt$$

چون $E_s(s-t)_+^r$ علامت ثابت دارد طبق قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها داریم :

$$Ef = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{r!} \int_a^b E_s(s-t)_+^r dt$$

سپس

$$|Ef| \leqslant \frac{M^{(r+1)}}{r!} \int_a^b |E_s(s-t)_+^r| dt$$

# ادامه اثبات

حال اگر اپراتور خطی $I - Q = E$ را به هر دو سمت معادله اعمال کنیم. سپس داریم

$$Ef = \frac{1}{r!} E \int_a^b f^{(r+1)}(t)(s-t)_+^r dt$$

$$Ef = \frac{1}{r!} \int_a^b f^{(r+1)}(t) E_s (s-t)_+^r dt$$

چون $E_s(s-t)_+^r$ علامت ثابت دارد طبق قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها داریم :

$$Ef = \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{r!} \int_a^b E_s(s-t)_+^r dt$$

سپس

$$|Ef| \leqslant \frac{M^{(r+1)}}{r!} \int_a^b |E_s(s-t)_+^r| dt$$

## مثال

خطای قاعده ذوزنقه‌ای را با قراردادن $a = 0, b = h$ محاسبه می‌کنیم. خطای $E_{Trap}(f)$ است.

$$E_{Trap}(f) = \int_0^h f(s)ds - \frac{h}{2}[f(0) + f(h)].$$

## مثال

خطای قاعده ذوزنقه‌ای را با قراردادن $a = 0, b = h$ محاسبه می‌کنیم. خطای $E_{Trap}(f)$ است.

$$E_{Trap}(f) = \int_0^h f(s)ds - \frac{h}{2}[f(0) + f(h)].$$

که

$$[E_{Trap}(s - t)_+| = \int_0^h (s - t)_+ ds - \frac{h}{2}[(0 - t)_+ + (h - t)_+]$$

## مثال

خطای قاعده ذوزنقه‌ای را با قراردادن $a = 0, b = h$ محاسبه می‌کنیم. خطای $E_{Trap}(f)$ است.

$$E_{Trap}(f) = \int_0^h f(s)ds - \frac{h}{2}[f(0) + f(h)].$$

که

$$[E_{Trap}(s-t)_+| = \int_0^h (s-t)_+ds - \frac{h}{2}[(0-t)_+ + (h-t)_+]$$

بنابراین

$$E_{Trap}(f) = f^{(2)}(\xi)\int_0^h (\frac{-t}{2}(h-t))dt$$

$$= \frac{-f^{(2)}(\xi)}{12}h^3$$

## مثال

خطای قاعده ذوزنقه‌ای را با قراردادن $a = 0, b = h$ محاسبه می‌کنیم. خطای $E_{Trap}(f)$ است.

$$E_{Trap}(f) = \int_0^h f(s)ds - \frac{h}{2}[f(0) + f(h)].$$

که

$$[E_{Trap}(s-t)_+| = \int_0^h (s-t)_+ ds - \frac{h}{2}[(0-t)_+ + (h-t)_+]$$

بنابراین

$$E_{Trap}(f) = f^{(2)}(\xi)\int_0^h (\frac{-t}{2}(h-t))dt$$

$$= \frac{-f^{(2)}(\xi)}{12}h^3$$

# مثال

با استفاده از قضیه پئانو می‌خواهیم یک کران خطا برای دستور $N$ نقطه‌ای گاوس_لژاندر بیابیم با فرض $(a,b)=(-1,1)$ داریم:

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{M^{(2N)}}{(2N-1)!}\int_{-1}^{1}\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right|dt.$$

## مثال

با استفاده از قضیه پئانو می‌خواهیم یک کران خطا برای دستور $N$ نقطه‌ای گاوس_لژاندر بیابیم با فرض $(a,b)=(-1,1)$ داریم:

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{M^{(2N)}}{(2N-1)!}\int_{-1}^{1}\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| dt.$$

$$\begin{aligned}\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| &= \left|\int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1} ds - \sum_{i=1}^{N} w_i(\xi_i-t)_+^{2N-1}\right| \\ &\leqslant \left|\int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1} ds\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} w_i(\xi_i-t)_+^{2N-1}\right|\end{aligned}$$

## مثال

با استفاده از قضیه پئانو می‌خواهیم یک کران خطا برای دستور $N$ نقطه‌ای گاوس‌ـلژاندر بیابیم با فرض $(a, b) = (-1, 1)$ داریم:

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{M^{(2N)}}{(2N-1)!} \int_{-1}^{1} \left| E_s(s-t)_+^{2N-1} \right| dt.$$

$$\begin{aligned} \left| E_s(s-t)_+^{2N-1} \right| &= \left| \int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1} ds - \sum_{i=1}^{N} w_i(\xi_i - t)_+^{2N-1} \right| \\ &\leqslant \left| \int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1} ds \right| + \left| \sum_{i=1}^{N} w_i(\xi_i - t)_+^{2N-1} \right| \end{aligned}$$

# ادامه مثال

اما داریم:

$$(s-t)_+ \leqslant 2, \quad \forall s,t \in [-1,1], \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 2,$$

$$\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| \leqslant 2^{2N+1}$$

## ادامه مثال

اما داریم:

$$(s-t)_+ \leqslant 2, \quad \forall s,t \in [-1,1], \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 2,$$

$$\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| \leqslant 2^{2N+1}$$

بنابراین

$$\left|\int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| dt \leqslant 2^{2N+2}$$

## ادامه مثال

اما داریم:

$$(s-t)_+ \leqslant 2, \quad \forall s,t \in [-1,1], \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 2,$$

$$\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| \leqslant 2^{2N+1}$$

بنابراین

$$\left|\int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| dt \leqslant 2^{2N+2}$$

لذا

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{M^{(2N)}}{(2N-1)!}2^{2N+2} \sim 4M^{(2N)}\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{N}\right)^{2N}$$

# ادامه مثال

اما داریم:

$$(s-t)_+ \leqslant 2, \quad \forall s,t \in [-1,1], \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 2,$$

$$\left|E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| \leqslant 2^{2N+1}$$

بنابراین

$$\left|\int_{-1}^{1} E_s(s-t)_+^{2N-1}\right| dt \leqslant 2^{2N+2}$$

لذا

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{M^{(2N)}}{(2N-1)!}2^{2N+2} \sim 4M^{(2N)}(\frac{N}{\pi})^{\frac{1}{2}}(\frac{e}{N})^{2N}$$

که از قانون استرلینگ برای $(2N)!$ استفاده نمودهایم.

# قضیه(برآوردکشی)

فرض کنیم $f(z)$ در دایره‌ای به شعاع $R$ تحلیلی باشد و
$M^{(i)}(r) = \sup|f^{(i)}(z)|, \quad |z| \leqslant r$.قرار می‌دهیم $\rho = r/R$. در این صورت
برای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$M^{i}(r) \leqslant i!(\rho+\epsilon)^{i}M^{(0)}$$

اگر کران به‌دست آمده در قضیه فوق را در رابطه خطای گاوس قرار دهیم برای تابع تحلیلی در یک دایره به شعاع $R$ خواهیم داشت:

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{2N!(\rho+\epsilon)^{2N} M^{(0)}}{(2N-1)!} 2^{2N+1} \sim 4NM^{(0)}(2\rho+2\epsilon)^{2N},$$

اگر کران به‌دست آمده در قضیه فوق را در رابطه خطای گاوس قرار دهیم برای تابع تحلیلی در یک دایره به شعاع $R$ خواهیم داشت:

$$|Ef(Gauss)| \leqslant \frac{2N!(\rho+\epsilon)^{2N}M^{(0)}}{(2N-1)!}2^{2N+1} \sim 4NM^{(0)}(2\rho+2\epsilon)^{2N},$$

که به ازای $p > 2$ سرعت همگرایی بالایی دارد.

با تشکر از توجه شما