اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۰، شماره پیاپی ۳۱

سال شانزدهم شماره اول، ص ۲۶۵-۲۷۵

عنوان مقاله
ادامه عنوان مقاله در صورت لزوم

محمدرضا مهاجرنیا [۱] نام نویسنده دوم [۲]

چکیده:

آمار و اطلاعات از جمله مهمترین ابزارها جهت ارزیابی گذشته برای برنامه‌ریزی آینده و تصمیم‌گیری در سطوح مختلف مدیریتی است. با توجه به گستردگی جغرافیایی، تنوع رشته‌ها و تعدد دانشجویان و مدرسان در دانشگاه جامع علمی کاربردی، وجود مرجعی مسئول جهت ایجاد، پردازش و ارائه آمارهای به‌روز و قابل استناد امری ضروری است. به استناد مصوبه یکصد و ششمین جلسه شورای عالی اداری به شماره ۷۲۷۹۲/۱۹۰۱ مورخ ۱۲/۹/۱۳۸۲ و نیز برنامه ملی آمار کشور مصوب شورای عالی آمار در جلسه مورخ ۲۶/۱/۱۳۹۰ ، کمیته آماربخشی دانشگاه جامع علمی کاربردی در چارچوب مفاد زیر تشکیل می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: واژه اول، واژه دوم، ...، واژه پایانی.

---

[۱] توضیحات نام نویسنده اول

[۲] توضیحات نام نویسنده دوم

۱ مقدمه و پیشینه

مقاله کاماراسوامی (۱۹۸۰) یک توزیع دوپارامتری روی بازه $(0,1)$ به نام توزیع کاماراسوامی (برای خلاصه کام) را بیان کرده و با $kum(\alpha,\beta)$ نمایش داده می‌شود. تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر می باشد :

$$G_{Kum}(x;\alpha,\beta) \quad , \quad x\in(0,1) \qquad (۱)$$

که $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ پارامترهای شکل هستند. معادله (۱) به جهت سادگی با تابع توزیع تجمعی بتا مقایسه می‌شود که به‌وسیله نسبت تابع بتا ناقص داده می شود. تابع چگالی احتمال مربوط به معادله (۱) به‌صورت زیر می‌باشد :

$$g_{Kum}(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$

$$x\in(0,1)$$

تابع چگالی احتمال کام مانند توزیع بتا نسبت به مقادیر پارامترهایش تک مدی، تک آنتی مدی، صعودی، نزولی یا ثابت می‌باشد. توزیع کام دارای ویژگی‌های توزیع بتا می‌باشد (کاماراسوامی ۱۹۸۰): $\alpha > 1$ و $\beta > 1$ (تک مدی)؛ $\alpha < 1$ و $\beta < 1$ (تک آنتی مدی)؛ $\alpha > 1$ و $\beta \le 1$ (صعودی)؛ $\alpha \le 1$ و $\beta > 1$ (نزولی)؛ $\alpha = \beta = 1$(ثابت). تابع توزیع تجمعی پیوسته $G(x)$ را درنظر می گیریم، فرض می‌کنیم $g(x) = \left[\frac{dG(x)}{dx}\right]$ تابع چگالی احتمال باشد. با ترکیب کارهای کاماراسوامی (۱۹۸۰) و جونز(۲۰۰۹) تابع توزیع تجمعی توزیع کام– جی بوسیله عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = 1 - \{1-G(x)^{a}\}^{b} \qquad (۲)$$

که $a > 0$ ، $b > 0$ دو پارامتر اضافی برای کنترل چولگی و تغییر دادن وزن های دم هستند. توزیع کام – جی به جهت تابع توزیع تجمعی مطلوب در (۲) می‌تواند بطور موثر استفاده شود حتی اگر داده ها سانسور شده باشند. تابع چگالی احتمال مربوط به (۲) شکل خیلی ساده ای دارد که به فرم زیر می‌باشد:

$$f(x) = abg(x)G(x)^{a-1}\{1-G(x)^{a}\}^{b-1} \qquad (۳)$$

تابع چگالی احتمال (۳) برتری که نسبت به توزیع بتا – جی دارد این است که درگیر تابع خاصی نیست. برای هر توزیع اسم پیوسته‌ای(در اینجا اسم نام توزیع پایه ای را نشان می‌دهد) با تابع توزیع تجمعی $G(x)$ و تابع چگالی احتمال $g(x)$، کوردیرو و دی کاسترو (۲۰۱۱) توزیع کام – اسم را با رابطه (۳) و با دو پارامتر شکل اضافی a و b تعریف کردند. برای مثال، توزیع های کام – نرمال، کام – وایبل، کام – گاما و کام – گامبل (کام گام) با در نظر گرفتن $G(x)$ به عنوان تابع توزیع تجمعی نرمال، وایبل، گاما و گامبل به ترتیب بدست می‌آیند. علاوه بر این کوردیرو و همکاران چندین ویژگی توزیع کاماراسوامی وایبل را معرفی و بررسی کردند که مدل

انعطاف پذیرتر برای آنالیز داده‌های مثبت می‌باشد. بنابراین هر توزیع جدید کام – جی می‌تواند از توزیع G مشخص شده بدست آورده شود. کوردیرو و دی کاسترو (۲۰۱۱) چندتا از این فرهای تعمیم یافته را معرفی کردند اما روی جزئیات آنها بحث نکردند. به وضوح، توزیع G نمونه منحصربه فرد توزیع کام – جی برای $a = b = 1$ با حالتهای نسبت به هم متقاطع پیوسته و با شکلهای متفاوت می باشد. (برای مثال، ترکیب ویژه ای از چولگی و برجستگی). یک برتری اصلی کلاس توزیع‌های کام تعمیم یافته، توانایی برازش داده های چوله است که به‌وسیله توزیع‌های موجود نمی‌توانند به درستی برازش داده شوند.

در این مقاله بعضی ویژگی‌های ریاضی وار توزیع کام گام را با امید به اینکه قابلیت کاربرد بیشتری در مهندسی خواهد داشت، مطالعه می کنیم. از حالا به بعد، تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع گامبل را به ترتیب با $G_{\mu,\sigma}(X) = \exp(-u)$ و $g_{\mu,\sigma}(X) = \sigma^{-1}u\exp(-u)$ نشان می دهیم که $\sigma > 0$ و $\mu < \infty$ و $x > -\infty$ و $u = \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}$ است. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع کام گام به ترتیب به فرم زیر می‌باشند:

$$F(x) = 1 - \{1 - \exp(-au)\}^b \qquad (۴)$$

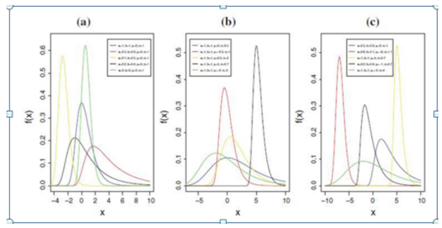
$$f(x) = ab\sigma^{-1}u\exp(-au)\{1 - \exp(-au)\}^{b-1} \qquad (۵)$$

یک تفسیر فیزیکی توزیع کام گام داده شده در روابط (۴) و (۵) (که a و b ارقام مثبت هستند) بصورت زیر می‌باشد. فرض می‌کنیم یک سیستم از b عنصر ساخته شده باشد و هر عنصر از a عنصر فرعی ساخته شده باشد. از طرف دیگر فرض می کنیم سیستم شکست می‌خورد اگر هر کدام از b عنصر شکست بخورد و همچنین هر عنصرشکست می‌خورد اگر همه‌ی a عنصر فرعی شکست بخورد. در نظر مي‌گيريم $X_{j1}, X_{j2}, \cdots, X_{ja}$ طول عمر زیر عنصرها را در j امین عنصر که $j = 1, \cdots, b$ با توضیح تجمعی مشترک $G_{\mu,\sigma}(X)$ است را نشان دهد. فرض می‌کنیم X_j طول عمر j امین عنصر، $j = 1, \cdots, b$ را نشان دهد و همچنین x را طول عمر کل سیستم در نظر می‌گیریم. در نتیجه تابع توزیعی تجمعی x بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
Pr(X < x) &= 1 - Pr^b(X_1 > x)\\
&= 1 - \{1 - Pr(X_1 \leq x)\}^b\\
&= 1 - \{1 - Pr(X_{11} \leq x, X_{12} \leq x, \cdots, X_{1a} \leq x)\}^b\\
&= 1 - \{1 - Pr^a(X_{11} \leq x)\}^b\\
&= 1 - \left\{1 - G^a_{\mu,\sigma}(x)\right\}^b
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می شود که توزیع کام گام در روابط (۴) و (۵) بطور صریح توزیع زمان شکست کل سیستم می باشد . تابع چگالی کام گام (۵) خیلی انعطاف پذیرتر از توزیع گامبل و خیلی ساده تر از

تابع چگالی توزیع بتا گامبل است (نداراجا و کوتز ۲۰۰۴). این تعمیم، موجب انعطاف بیشتر دم های آن مي شود. نمودارهای تابع چگالی (۵) برای بعضی مقادیر پارامترها در شکل ۱ نشان داده شده اند. مسائل زیر را در نظر بگیرید: (الف) برنامه



شکل ۱: نمودارهای تابع چگالی احتمال کام گام برای مقادیر پارامترهای انتخابی: الف) مقادیر پارامترها $\alpha = 1$، $\gamma = 0.5$ و $\lambda = 0.5$ ب) $\alpha = 0.1$، $\gamma = 0.5$ و $\lambda = 1$.

ریزي ، طراحی و مدیریت مسائل زیادی از مهندسی آب شناسی نیازمند اطلاعات کاملی از رفتار واقعه سیل دارد. در آنالیز نوسان سیل اغلب از توزیع گامبل استفاده می شود تا مقادیر حداکثر سیل را مدل‌بندی کند، که تخمینی از وقایع سیل را میسر می سازد؛ (ب) علم خوردگی اساساً بر یافته های قطعی، به ویژه نظریه الکترو شیمیایی خوردگی بنا نهاده شده است. خوردگی موضعی، بهرحال، بدون نقطه نظرات آماری و تصادفي به جهت پراکندگی بزرگ داده های رایج در لابراتوار و زمینه کاری نمی تواند بیان شود. کاربردهای موفقیت آمیز یافته های آماری براي خوردگی موضعی در مهندسی داده بوسیله توزیع گامبل پیدا می شود تا ماکزیمم عمق حفوه را برآورد کنیم که در یک زمینه بزرگ نصب با استفاده از تعداد نمونه های کوچک با وسعت کم یافت خواهد شد؛ (ج) همچنین نشان داده شده است که توزیع گامبل برازش خوبی را برای سریهای زمانی فشارهای حرکتی خیلی زیاد، میسر می سازد (به عنوان مثال مجذور سرعتهای خیلی زیاد باد)؛ (د) هر کدام از مسائل بالادرگیر رفتار دم یک یا چند متغیر است. بنابراین، با بررسي خیلی دقیق‌تر رفتار دم، می‌توانیم برآورد و پیش بینی بهتری بدست آوریم. مدل پیشنهادی ما، رابطه (۵) ، یک راه انجام این مطلب را بیان می کند.

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال رابطه (۵) باشد، می نویسیم $X \sim kumGum(a, b, \mu, \sigma)$ است . تابع چارک کام گام با معکوس کردن رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$X = Q(z) = F^{-1}(z) = \mu - \sigma \log\left\{\log\left[1-(1-z)^{\frac{1}{b}}\right]^{\frac{1}{a}}\right\} \quad (۶)$$

بنابراین می توانیم متغیرهای کام گام را از رابطه (۶) با در نظر گرفتن $X = Q(z)$ تولید کنیم ، که Z یک متغیر یکنواخت در فاصله واحد $(0,1)$ است.

روش دوم ما برای شبیه سازی از توزیع کام گام بر مبنای رد روش است. این مطلب اگر $a \geq 1$ و

$b \geq 1$ باشد برقرار است. ثابت H را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$M = \frac{a^b b(a-1)^{1-1/a}(b-1)^{b-1}}{(ab-1)^{b-1/a}}$$

بنابراین، طرحهای زیر برای شبیه سازی متغیرهای کام گام برقرار می شود:

(۱) شبیه سازی $X = x$ از تابع چگالی احتمال $g_{\mu,\sigma}(x)$.

(۲) شبیه سازی $Y = UM_x$ که U یک متغیر یکنواخت روی فاصله واحد $(0,1)$ است.

(۲) پذیرفتن $X = x$ به عنوان متغیر کام گام اگر $y < f(x)$ باشد. اگر $y(x)$ باشد به قدم (۲) بر می گردیم.

تابعهای توزیع و چگالی

در این قسمت، عباراتی برای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع کام گام بدست می‌آوریم که برای مطالعه ویژگیهای ریاضیاتی آن مفید می باشد. نمایش سری زیر را در نظر بگیرید (برای α غیر صحیح حقیقی):

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-j+1)} \frac{z^j}{j!}$$

برای b غیر صحیح حقیقی، تابع توزیع تجمعی (۴) بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$F(x) = 1 - \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K \Gamma(b+1)\exp(-Kau)}{\Gamma(b-k+1)k!} \qquad (۷)$$

و تابع چگالی احتمال کام گام می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\sigma^{-1}\Gamma(b+1) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u \exp\{-(k+1)au\}}{\Gamma(b-k)k!} \end{aligned} \qquad (۸)$$

اگر b یک عدد صحیح باشد، اندیس k در معادله (۷) و (۸) در $b-1$ متوقف می شود.

شکل اولین مشتق $\log\{f(x)\}$ برای توزیع کام گام بصورت زیر است:

$\frac{\mathrm{d}\log f(x)}{dx} = -\frac{u}{\sigma}\left\{\frac{1}{u} - a + \frac{a(b-1)}{\exp(au)-1}\right\}$ که $u = \exp\left\{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}\right\}$ است. بنابراین مدهای $f(x)$ ریشه های معادله زیر می باشند:

$$\frac{a(b-1)}{\exp(au)-1} = a - \frac{1}{u} \qquad (۹)$$

معادله (۹) ممکن است بیشتر از یک ریشه داشته باشد. اگر $x = x_{\boldsymbol{o}}$ یک ریشه (۹) باشد، در نتیجه آن مربوط به یک ماکزیمم موضعی، مینیمم موضعی یا یک نقطه خمیدگی می شود منوط به اینکه آیا $\lambda(x_{\boldsymbol{o}})<0$ ، $\lambda(x_{\boldsymbol{o}})>0$ یا $\lambda(x_{\boldsymbol{o}})=0$ است که $\lambda(x) = \frac{\mathrm{d}^2\log f(x)}{dx^2}$ و به فرم زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= -\frac{u^2}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{u^2} + \frac{a^2(b-1)\exp(au)}{[\exp(au)-1]^2}\right\} \\ &= \frac{u}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{u} - a + \frac{a(b-1)}{\exp(au)-1}\right\} \end{aligned}$$

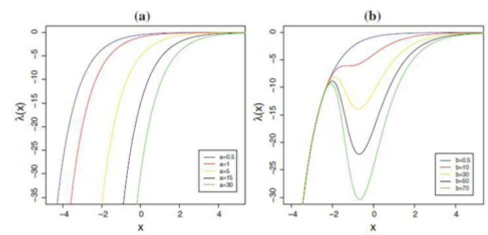
نمودارهای شکل های $\lambda(x)$ برای مقادیر انتخابی $a, b, \mu = 0$ و $\sigma = 1$ در شکل ۲ آورده شده اند.

علاوه بر این، $f(x)$ و $F(x)$ مجانبی وقتی $x \longrightarrow 0, \infty$ میل می کند به صورت زیر می باشند:

$$f(x) \sim \sigma^{-1} abu \exp(-au)$$

وقتی $u \longrightarrow \infty$ میل می کند،

$$f(x) \sim \sigma^{-1} a^b b u^b$$



شکل ۲: نمودارهای $\lambda(x)$ برای مقادیر پارامترهای انتخابی. الف) مقادیر پارامتری $b = 1$، $\mu = 0$، $\sigma = 1$. ب) مقادیر پارامتری $a = 1$، $\mu = 0$، $\sigma = 1$.

وقتی $u \longrightarrow 0$ میل می کند،

$$F(x) \sim b \exp(-au)$$

وقتی $u \longrightarrow \infty$ میل می کند و

$$1 - F(x) \sim (au)^b \qquad (۱۰)$$

وقتی $u \longrightarrow 0$ میل می کند. توجه کنید که دم بالایی $f(x)$ از نوع نمایی است در حالیکه دم پائینی از نوع جفت نمایی است.

تابع نرخ زیان

تابع نرخ زیان تعریف شده به صورت $h(x) = \frac{f(x)}{[1-F(x)]}$ یک مقدار مهم توصیف کننده پدیده بقا یک سیستم است. برای توزیع کام گام، $h(x)$ فرم زیر را می گیرد:

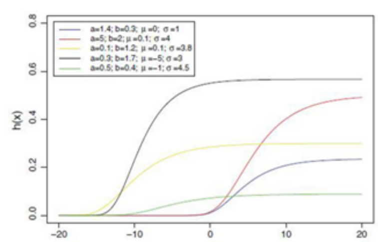
$$h(x) = \frac{abu\exp(-au)}{\sigma\{1-\exp(-au)\}}, \qquad (۱۱)$$

که $u = \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}$ می باشد. اولین مشتق $\log h(x)$ بصورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{d}\log f(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{u}{\sigma}\{\frac{1}{u} - a - \frac{1}{\exp(au)-1}\}$$

و $u = \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}$ است. بنابراین مدهای $h(x)$ ریشه های رابطه زیر هستند:

$$\frac{1}{\exp(au)-1} = \frac{1}{u} - a \qquad (۱۲)$$



شکل ۳: نمودار های تابع نرخ زیان (۱۱) (شکل ثابت و افزایشی) برای بعضی مقادیر پارامترها .

ممکن است معادله (۱۲) بیشتر از یک ریشه داشته باشد. اگر $x = x_o$ یک ریشه معادله (۱۲) باشد، بنابراین آن مربوط به یک ماکزیمم موضعی، یک مینیمم موضعی یا یک نقطه خمیدگی می شود منوط به اینکه آیا $\lambda(x_o) < 0$ ، $\lambda(x_o) > 0$ یا

$\lambda(x_o) = 0$ است بطوریکه $\lambda(x) = \frac{d\log^2 h(x)}{dx^2}$ به شکل زیر است:

$$\lambda(x) = -\frac{u^2}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{u^2} - \frac{a\exp(au)}{[\exp(au)-1]^2}\right\} + \frac{u}{\sigma^2}\left\{\frac{1}{u} - a - \frac{1}{\exp(au)-1}\right\}$$

علاوه بر این مجانبی $h(x)$ وقتی $x \longrightarrow 0, \infty$ میل می کند به صورت زیر می شود:

$$h(x) \sim \sigma^{-1} abu \exp(-au)$$

وقتی $u \longrightarrow \infty$ میل می کند و

$$h(x) \sim \sigma^{-1} b$$

وقتی $u \longrightarrow 0$ میل می کند. بنابراین تابع نرخ زیان آغازین صعودی است وقتی خرابی های سیستم به یک نقطه ثابت می رسد. شکل ۳ بعضی شکل های ممکن $h(x)$ برای مقادیر انتخابی a, b, μ, σ را نشان می دهد.

گشتاورها

اگر x چگالی احتمال (۵) را داشته باشد ، با قرار دادن $x = \mu - \sigma\log(u)$ گشتاور n ام x از رابطه‌ی (۸) بصورت زیر نتیجه می شود:

با استفاده از بسط دو جمله ای، می توانیم $E(X^n)$ را به صورت مجموع دوتایی بیان کنیم:

$$\begin{aligned} E(X^n) &= a\Gamma(b+1) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{k+j}\binom{n}{j}\sigma^j\mu^{n-j}}{\Gamma(b-k)k!} \\ &\times \int_0^{\infty} \log^j(u)\exp\{-(k+1)au\}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

برای $a > 0$ و j یک عدد صحیح غیر منفی، تعریف می کنیم:

$$I(j,a) = \int_0^{\infty} \log^j(u)\exp(-au)\mathrm{d}u,$$

که می تواند بوسیله معادله (۲.۶.۲۱.۱) در پرودنیکف و همکارانش (۱۹۸۶) بصورت زیر محاسبه شود:

$$I(j,a) = |_{\alpha=1}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j [a^{-\alpha}\Gamma(\alpha)]|_{\alpha=1}. \tag{۱۳}$$

در نتیجه گشتاور n ام، x می شود:

$$\begin{aligned} E(X^n) &= a\Gamma(b+1) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{k+j}\binom{n}{j}\sigma^j\mu^{n-j}}{\Gamma(b-k)k!} \\ &\times I(j,(K+1)a), \end{aligned}$$

که $I\,(j,(k+1)a)$ را می توان از رابطه ۱۳ محاسبه کرد. برای $n = 1$ ، حالات خاصی برای محاسبه

میانگین بدست می آوریم:

$$I(0,a)=\frac{1}{a}, I(1,a)=\frac{\psi(1)-\log(a)}{a},$$

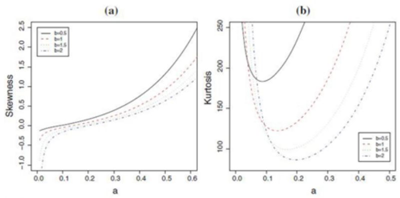
که $\psi(0)$ تابع دی گاما است. بنابراین:

$$\begin{aligned} E(X) &= \Gamma(b+1) \\ \times \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[\mu-\sigma\{\psi(1)-\log[(k+1)a]\}}{\Gamma(b-k)(k+1)!} \end{aligned}$$

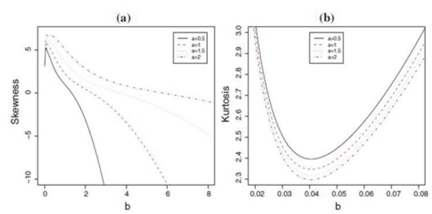
اندازه های چولگی و برجستگی عمدتا بوسیله پارامترهای a و b کنترل می شوند که می توان از میانگین $E(x)$ و واریانس $Var(x)$ با استفاده از روابط:

$$\begin{aligned} K_3(x) &= \{E(X^3)-3E(X)E(X^2) \\ + \quad & 2E^3(X)\}\, Var^{-\frac{3}{2}}(X) \\ K_4(x) &= \{E(X^4)-4E(X)E(X^3) \\ + \quad & 6E(X^2)E^2(X)-3E^4(X)\} \\ \times \quad & Var^{(-2)}(X) \end{aligned}$$

محاسبه شوند. نمودارهای چولگی و برجستگی برای مقادیر انتخابی b به عنوان یک تابع از a و برای مقادیر انتخابی a به عنوان یک تابع از b ، برای $\mu = 0$ ، $\sigma = 1$ و $\mu = 100$ ، $\sigma = 10$ در شکل ۴ و ۵ نشان داده شده اند. این نمودارها نشان می دهند که چولگی برای $b(a)$ ثابت ، به عنوان یک تابع از $a(b)$ افزایش می یابد (افزایش و سپس کاهش می یابد) ، در حالیکه برجستگی به عنوان یک تابع از aو b ، وقتی دیگر پارامترها ثابت باشند، اول تا مینیمم مقدار کاهش و سپس افزایش می یابد.



شکل ۴: چولگی و برجستگی توزیع کام گام به عنوان یک تابع از a برای بعضی مقادیر b.



شکل ۵: چولگی و برجستگی توزیع کام گام به عنوان یک تابع از b برای بعضی مقادیر a.

تابع مولد

فرض می کنیم X یک متغیر تصادفی است که دارای تابع چگالی احتمال (۵) می باشد. دو عبارت فرم بسته برای تابع مولد گشتاور X ارائه می دهیم که با $M(t) = E\exp(tX)$ نشان داده می شود . باتغییر متغیر $x=\mu-\sigma\log(u)$ در عبارت

(۸)، بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} M(t) &= \sigma^{-1} a\Gamma(b+1) \\ \times & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(b-k)k!} \\ \times & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx)u \\ \times & \exp\{-(k+1)au\}\mathrm{d}x \\ = & \; a\exp(a\mu)\Gamma(b+1) \\ \times & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(b-k)k!} \\ \times & \int_{0}^{\infty} u^{-\sigma t} \\ \times & \exp\{-(k+a)au\}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۲.۳.۳.۱) در پرودنیکف و همکاران (۱۹۸۶)، $M(t)$ بصورت زیر خلاصه می شود:

$$\begin{aligned} M(t) &= a^{\sigma t}\exp(tu)\Gamma(b+1)\Gamma(1-\sigma t) \\ \times & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+1)}{\sigma t - 1\Gamma(b-k)k!} \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

نمایش دوم برای تابع مولد گشتاور می تواند به صورت زیر استخراج شود. برای $b > 0$ حقیقی غیر صحیح، داریم:

$$\begin{aligned} & G(x)^{a-1}\{1-G(x)^a\}^{b-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} qiG(x)^{a(i+1)-1}, \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که ضرایب $q_i = (-1)^i \left(i^{b-1}\right)$ هستند. اگر b یک عدد صحیح باشد، اندیس i در مجموع قبلی در $b-1$ متوقف می شود. با استفاده از (۱۵) $M(t)$، می تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$\rho\sum_{i=0}^{\infty} M(t) = ab\,(t, a(i+a)-1) \qquad (۱۶)$$

که تابع $\int_{-\infty}^{infty}(t,a) = \rho\exp(tx)G(x)^a g(x)\mathrm{d}x$ می تواند از تابع چارک گامبل $Q(u) = G^{-1}(u) = \mu - \sigma\log\left[-\log(u)\right] as$ به صورت زیر محاسبه شود:

$$\int_0^1 (t,a) = \rho\exp\, tQ(u)\, u^a \mathrm{d}u \qquad (۱۷)$$

تفسیر انتگرال بالا کاملا ساده است اگر a یک عدد صحیح مثبت باشد، معادله (۱۷) (به استثنای ضریب خطا $a+1$) تابع مولد گشتاور ماکزیمم در یک نمونه با اندازه $a+1$ از توزیع G است. بنابراین از رابطه (۱۷) داریم:

با استفاده از معادله (۲.۶.۳.۱) در پرودنیکف و همکاران (۱۹۸۶)، برای $t < \sigma^{-1}$ بدست می آوریم:

در نتیجه، معادله (۱۶) نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} M(t) &= ab\exp(t\mu)\Gamma(1-\sigma t) \\ \times & \left[a(i+1)-1\right]^{\sigma t-1}\sum_{i=0}^{\infty} qi \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که برای $\sigma t < 1$ برقرار می شود.

معادلات (۱۴) و (۱۸) نتایج اصلی این بخش

هستند. تابع مشخصه $\phi(t) = E\left[\exp(itX)\right]$ استفاده شود. از X می تواند از این معادلات با جایگذاری it به جای t وقتی $i = \sqrt{-1}$ است، بدست آورده شود.

مقادیر بی نهایت

اگر $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از (۵) باشد و اگر $\overline{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ میانگین نمونه را مشخص کند ، بنابراین بوسیله قضیه حد مرکزی معمول

$$\sqrt{n}(\overline{X} - E(X))/\sqrt{Var(X)}$$

به توزیع نرمال استاندارد وقتی $n \longrightarrow \infty$ میل می کند ، نزدیک می شود. گاهی اوقات به مقادیر بی نهایت مجانبی $M_n = max\left(X_1, \cdots, X_n\right)$ و $m_n = min\left(X_1, \cdots, X_n\right)$ علاقه مندیم. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال را به ترتیب (۴) و (۵) در نظر می گیریم. به آسانی می توانیم ثابت کنیم که:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(t + \sigma x/b)}{1 - F(t)} = \exp(-x)$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(t + (\sigma/a)x \exp\{(t-\mu)/\sigma\})}{F(t)} = \exp(x)$$

۲ عنوان بخش دوم

بخش دوم در این قسمت نوشته شود و به همین ترتیب برای افزودن تعداد بخش‌ها از این ساختار

مراجع

[1] first ref. .

[2] second ref. .

[3] last ref. .

اندیشه آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۰، شماره پیاپی ۳۱
سال شانزدهم شماره اول، ص ۲۷۶-۲۸۵

عنوان مقاله
ادامه عنوان مقاله در صورت لزوم

نام نویسنده اول [۱] نام نویسنده دوم [۲]

چکیده:

چکیده در این قسمت نوشته شود.

واژه‌های کلیدی: واژه اول، واژه دوم، ...، واژه پایانی.

[۱] توضیحات نام نویسنده اول

[۲] توضیحات نام نویسنده دوم

۱ عنوان بخش اول

بخش اول در این قسمت نوشته شود.

مثال ۱.۱. *برای نوشتن مثال از این ساختار استفاده شود.*

قضیه ۲.۱. *برای نوشتن قضیه از این ساختار استفاده شود.*

لم ۳.۱. *برای نوشتن لم از این ساختار استفاده شود.*

گزاره ۴.۱. *برای نوشتن گزاره از این ساختار استفاده شود.*

تعریف ۵.۱. *برای نوشتن تعریف از این ساختار استفاده شود.*

نتیجه ۶.۱. *برای نوشتن نتیجه از این ساختار استفاده شود.*

۲ عنوان بخش دوم

بخش دوم در این قسمت نوشته شود و به همین ترتیب برای افزودن تعداد بخش‌ها از این ساختار استفاده شود.

مراجع

[1] first ref. .

[2] second ref. .

[3] last ref. .

Statistical Thinking, Spring 2011

Vol. 31, No. 1, pp 265-275

second article title continuing title in this line (if required)

The name of first auther [1] The name of second auther [2]

Abstract:

Include latin abstract here.

Keywords: first word, second word, etc. .

---

[1] foot print

[2] foot print

Statistical Thinking, Spring 2011

Vol. 31, No. 1, pp 265-275

first article title continuing title in this line (if required)

The name of first auther [1] The name of second auther [2]

Abstract:

Include latin abstract here.

Keywords: first word, second word, etc. .

[1] foot print

[2] foot print