بررسی گراف‌های به طور قوی منظم جهت‌دار

الهام اذان گویان فرد

tavakoli elena@yahoo.com

چکیده

در این مقاله، گراف‌های به طور قوی منظم را معرفی می‌کنیم و گراف‌های به طور قوی منظم جهت‌دار را به عنوان تعمیمی از گراف‌های به طور قوی منظم بیان می‌کنیم.

واژگان کلیدی: گراف به طور قوی منظم، گراف به طور قوی منظم جهت‌دار، یال ورودی، یال خروجی، مسیر جهت‌دار

۱ مقدمه

مفهوم گراف‌های به طور قوی منظم یکی از موضوعات اصلی در نظریه جبری گراف به شمار می‌آید. این مفهوم به وسیله‌ی *بوس* [۱] در مقاله‌ی [۱] معرفی شده است. در سال ۱۹۶۷، *سایدل* [۲] اولین مقاله‌ی خود [۳]، را روی گراف‌های به طور قوی منظم منتشر کرد. در سال ۱۹۶۶، *هیگمن* [۳] گراف‌های به طور قوی منظم را به کمک گروهای جایگشتی از مرتبه ۳ مورد بررسی قرار داده است. پس از پایان دسته‌بندی گراف‌های به طور قوی منظم، مطالعه روی تعمیم‌های این نوع گراف‌ها قوت گرفت. در سال ۱۹۸۸، *داول* [۴] در مقاله‌ی [۲] مفهوم گراف‌های به طور قوی منظم جهت‌دار را به عنوان تعمیمی از گراف‌های به طور قوی منظم معرفی کرد و خواص این نوع گراف‌ها را مورد بررسی قرار داد.

۲ متن اصلی

۱.۲ گراف‌های به طور قوی منظم

یک عدد صحیح مثبت n را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\Omega = \Omega_n := \{۱, ۲, \cdots, n\}.$$

فرض کنید $R \subseteq \Omega \times \Omega$ یک رابطه‌ی غیر بازتابی از Ω باشد؛ یعنی، برای هر i، $(i, i) \notin R$. گراف جهت‌دار $\Gamma = (\Omega, R)$ را با مجموعه رئوس Ω و مجموعه یال‌های R در نظر می‌گیریم. اگر $R = R^t$، آن‌گاه Γ گرافی غیر جهت‌دار است که در آن

$$R^t := \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

[۱] Bose

[۲] Sidel

[۳] Higman

[۴] Daval

گراف متمم یک گراف جهت‌دار $\Gamma = (\Omega, R)$، گرافی است بدون طوقه با مجموعه رئوس Ω و یال‌های $\overline{R}$ که آن را با $\overline{\Gamma} = (\Omega, \overline{R})$ نمایش می‌دهیم، که در آن

$$\overline{R} := \{\Omega \times \Omega \setminus R\} \setminus \{(i,i)|\ i \in (۱, ۲, \cdots, n)\}.$$

به هر گراف $\Gamma = (\Omega, R)$، یک ماتریس مجاورت $A(\Gamma) = (a_{ij})$ نسبت داده می‌شود به طوری‌که $۱ \leq i, j \leq n$ و

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } (i,j) \in R, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این مقاله $I = I_n$، ماتریس همانی از مرتبه‌ی n، $J = J_n$، ماتریسی از مرتبه‌ی n، که همه‌ی درایه‌های آن ۱ و هم‌چنین j، بردار ستونی همه جا ۱ است.

تعریف ۱.۲. گراف Γ را $k-$منظم گوییم هرگاه درجه‌ی هر رأس آن برابر k باشد.

تعریف ۲.۲. در یک گراف Γ، اگر از رأس a به رأس b، یالی وجود داشته باشد، آن‌را **یال جهت‌دار** گوییم و با $a \longrightarrow b$ نمایش می‌دهیم. به علاوه اگر از b به a نیز یال جهت‌دار وجود داشته باشد، آن‌را *یال غیرجهت‌دار* گوییم و با $a \longleftrightarrow b$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. گراف n رأسی Γ را یک *گراف به طور قوی منظم غیرجهت‌دار یا گراف به طور قوی منظم* گوییم هرگاه $k-$منظم بوده و هر دو رأس مجاور، λ تا همسایگی مشترک و هر دو رأس غیرمجاور، μ تا همسایگی مشترک داشته باشند. همه‌ی یال‌ها در گراف Γ به صورت غیر جهت‌دار می‌باشند. گراف به طور قوی منظم غیرجهت‌دار با پارامترهای (n, k, μ, λ) را به اختصار به صورت $s.r.g$ نمایش می‌دهیم.

در ادامه دیده می‌شود که گراف به طور قوی منظم غیر جهت‌دار با پارامترهای (n, k, μ, λ) و ماتریس مجاورت $A = A(\Gamma)$ در معادلات زیر صدق می‌کند.

$$A^{۲} = kI + \lambda A + \mu(J - I - A), \tag{۱}$$

$$AJ = JA = kJ, \tag{۲}$$

$$A^{۲} + A(\mu - \lambda) - I(k - \mu) = \mu J. \tag{۳}$$

قضیه ۴.۲. *یک گراف به طور قوی منظم غیر جهت‌دار با پارا مترهای (n,k,μ,λ) و ماتریس مجاورت $A=A(\Gamma)$ وجود دارد اگر و تنها اگر ماتریس مجاورت گراف در معادلات زیر صدق کند.*

$$A^{۲}+A(\mu-\lambda)-I(k-\mu)=\mu J, \qquad AJ=JA=kJ.$$

اثبات. فرض کنید Γ یک گراف به طور قوی منظم با پارامترهای (n,k,μ,λ) با ماتریس مجاورت A باشد. درایه‌ی (a,b) از $A^{۲}$، تعداد راه‌های به طول ۲ از a به b است، لذا تعداد راه‌های به طول ۲ که شروع و پایانش به یک رأس می‌باشد، درجه‌ی آن رأس است. بنابراین از این‌که Γ منظم است، نتیجه می‌شود که $(A^{۲})_{a,a}=k$. حال تعداد راه‌های به طول ۲ که از رأس a شروع و به رأس b ختم می شوند، برابر تعداد مثلث‌ها در Γ می‌باشند که شامل یال (a,b) است، پس داریم $(A^{۲})_{a,b}=\lambda$. همچنین اگر یال $(a,b)\notin\Gamma$، آن‌گاه یال $(a,b)\in\overline{\Gamma}$؛ یعنی، اگر a و b دو رأس غیر مجاور در Γ باشند، آن‌گاه a و b دو رأس مجاور در متمم Γ هستند. در نتیجه $(A'^{۲})_{a,b}=\lambda'$، که λ' برابر تعداد مثلث ها در $\overline{\Gamma}$ است. که در آن $A'=A(\overline{\Gamma})=J-I-A$. بنابراین برآورد می‌کنیم که:

$$A^{۲}=kI+\lambda A+\lambda'(J-I-A). \tag{۴}$$

با توجه به تعریف گراف به طور قوی منظم و متمم آن داریم، $\lambda'=\mu$ در نتیجه با جای‌گذاری در (۴)داریم:

$$A^{۲}=kI+\lambda A+\mu(J-I-A).$$

به‌علاوه از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}&A^{۲}=kI+\lambda A+\mu J-\mu I-\mu J,\\ \Rightarrow&A^{۲}-\lambda A-kI+\mu I+\mu A=\mu J,\\ \Rightarrow&A^{۲}+A(\mu-\lambda)-I(k-\mu)=\mu J.\end{aligned}$$

برعکس: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف Γ باشد به طوری‌که در معادله‌ی (۱) صدق کند. چون در معادله‌ی (۱)، k تا ماتریس همانی وجود دارد، پس در $A^{۲}$ راه‌های به طول ۲ که از رأس

a شروع و پایان آن به رأس a می‌باشد، برابر با k است. در نتیجه درجه‌ی هر رأس برابر k می‌باشد. بنابراین گراف $k-$منظم است. هم‌چنین چون λ تا ماتریس A وجود دارد، پس راه‌های به طول ۲ در Γ، λ برابر درایه‌ی (a,b) در A است، لذا دو رأس مجاور a و b در گراف Γ شامل λ تا همسایگی مشترک می‌باشند و چون μ تا ماتریس $J-I-A$ داریم، پس برای دو رأس غیر مجاور در Γ، تعداد راه‌های به طول ۲ برابر μ تا رئوس غیر مجاور در A است. بنابراین نتیجه می‌گیریم Γ یک گراف به طور قوی منظم با پارامترهای (n,k,μ,λ) است. $\square$

۲.۲ گراف های به طور قوی منظم جهت‌دار

تعریف ۵.۲. یالی که به هر رأس وارد می‌شود، *یال ورودی* و یالی که از هر رأس خارج می‌شود، *یال خروجی* گوییم.

تعریف ۶.۲. یک *مسیر جهت‌دار* از $b_۰$ به b_t در گراف Γ، دنباله‌ی $b_۰ \longrightarrow b_۱ \longrightarrow \cdots \longrightarrow b_t$ از یال‌های جهت‌دار می‌باشد. به t طول مسیر گفته می‌شود.

تعریف ۷.۲. گراف جهت‌دار n رأسی Γ را یک *گراف به طور قوی منظم جهت‌دار* با پارامترهای (n,k,μ,λ,t) گوییم، هرگاه هر رأس آن k یال ورودی و k یال خروجی داشته باشد و برای هر دو رأس مجاور $(a,b)\in R$، تعداد مسیرهای جهت‌دار به طول ۲ از a به b برابر λ و برای هر دو رأس غیرمجاور $(a_۱,b_۱)\in R$، تعداد مسیرهای جهت‌دار به طول ۲ از $a_۱$ به $b_۱$ برابر μ است. هم‌چنین تعداد یال‌های غیرجهت‌دار هر رأس برابر t می‌باشد. به عبارت دیگر فقط هر رأس $k-t$ یال ورودی و فقط $k-t$ یال خروجی داشته باشد. گراف به طور قوی منظم جهت‌دار را به اختصار به صورت $d.s.r.g$ نمایش می‌دهیم.

در قضیه‌ی زیر دیده می‌شود که گراف به طور قوی منظم جهت‌دار با پارامترهای (n,k,μ,λ,t) با ماتریس مجاورت $A=A(\Gamma)$ در معادلات زیر صدق می‌کند.

$$A^۲ = tI + \lambda A + \mu(J-I-A), \qquad (۵)$$

$$A^۲ + A(\mu-\lambda) - I(t-\mu) = \mu J. \qquad (۶)$$

قضیه ۸.۲. *یک گراف به طور قوی منظم جهت‌دار Γ با پارامترهای (n,k,μ,λ,t) و ماتریس مجاورت $A=A(\Gamma)$ وجود دارد اگر و تنها اگر ماتریس مجاورت گراف در معادلات زیر صدق*

کند.

$$A^{۲} + A(\mu - \lambda) - I(t - \mu) = \mu J, \quad AJ = JA = kJ.$$

اثبات. فرض کنید $\Gamma = (\Omega, R)$، گراف به طور قوی منظم جهت‌داری با پارامترهای (n, k, μ, λ, t) و ماتریس مجاورت A باشد. درایه‌ی (a, b) در $A^{۲}$ تعداد مسیرهای به طول ۲ از a به b می‌باشد، لذا تعداد مسیرهای به طول ۲ که از رأس a شروع و پایان آن به رأس a می‌باشد، برابر تعداد یال‌های غیرجهت‌دار است، پس $(A^{۲})_{a,a} = t$. حال اگر دو رأس مجاور a و b را در نظر بگیریم، تعداد مسیرهای به طول ۲ که از رأس a شروع و پایانش به رأس b می‌باشد، برابر λ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم $(A^{۲})_{a,b} = \lambda$. همچنین اگر یال $(a, b) \notin R$، آن‌گاه یال $(a, b) \in \overline{R}$؛ یعنی، اگر a و b دو رأس غیرمجاور در گراف Γ باشند، آن‌گاه a و b دو رأس مجاور در گراف $\overline{\Gamma}$ هستند. بنابراین $(A'^{۲})_{a,b} = \lambda'$، که λ' برابر تعداد مثلث‌ها در گراف $\overline{\Gamma}$ است. حال برآورد می‌کنیم که:

$$A^{۲} = tI + \lambda A + \lambda'(J - I - A). \qquad (۷)$$

با توجه به تعریف گراف به طور قوی منظم جهت‌دار و متمم آن داریم:

$$\lambda' = \mu,$$

پس با جای‌گذاری در (۷) داریم:

$$A^{۲} = tI + \lambda A + \mu(J - I - A).$$

از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} A^{۲} &= tI + \lambda A + \mu J - \mu I - \mu A \\ \Rightarrow A^{۲} &- tI - \lambda A - \mu I - \mu A = \mu J \\ \Rightarrow A^{۲} &+ A(\mu - \lambda) - I(t - \mu) = \mu J. \end{aligned}$$

به وضوح تساوی $AJ = JA = kJ$ برقرار است.
برعکس: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف Γ باشد، که در تساوی (۵) صدق کند. چون در این تساوی t تا ماتریس همانی وجود دارد، لذا در $A^{۲}$ مسیرهای به طول ۲ که از رأس a شروع و پایانش به رأس a می‌باشد، برابر با t است، پس تعداد یال‌های غیرجهت‌دار برابر t می‌باشد. همچنین

λ تا ماتریس A وجود دارد، پس مسیرهای به طول ۲ که از رأس a شروع و پایانش به رأس b است، λ برابر درایه‌ی (a,b) در ماتریس A می‌باشد، در نتیجه هر دو رأس مجاور a و b در گراف Γ، λ تا همسایگی مشترک دارند. چون μ تا ماتریس $A^{'}$ داریم. بنابراین تعداد مسیرهای به طول ۲ برای هر دو رأس غیرمجاور در گراف Γ، برابر μ می‌باشد. با توجه به فرض قضیه، ماتریس مجاورت گراف در معادله (۲) صدق می‌کند، لذا گراف $k-$منظم است. در نتیجه گراف Γ یک گراف به طور قوی منظم جهت‌دار با پارامترهای (n,k,μ,λ,t) است. $\square$

لم ۹.۲. *اگر Γ یک گراف به طور قوی منظم جهت‌دار با پارامترهای (n,k,μ,λ,t) و ماتریس مجاورت A باشد، آن‌گاه گراف متمم $\overline{\Gamma}$، یک گراف به طور قوی منظم جهت‌دار با پارامترهای (n,k',μ',λ',t') و ماتریس مجاورت $A'=J-I-A$ می‌باشد. به طوری‌که:*

$$\begin{aligned}
k' &= (n-2k)+k-1,\\
\mu' &= (n-2k)+\lambda,\\
\lambda' &= (n-2k)+\mu-2,\\
t' &= (n-2k)+t-1.
\end{aligned}$$

اثبات. چون ماتریس مجاورت گراف در (۲) صدق می‌کند، داریم:

$$A'J = JA^{'} = k'J. \tag{8}$$

اگر در (۸)، $A^{'}$ را جای‌گذاری کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}
&(J-I-A)J = J(J-I-A) = k'J,\\
&J^2 - IJ - AJ = J^2 - JI - JA = k'J,\\
&nJ - J - kJ = k'J \Rightarrow J(n-1-k) = k'J \Rightarrow k' = n-k-1.
\end{aligned}$$

در تساوی بالا $(2k)$ را کم و زیاد می‌کنیم، پس دیده می‌شود که:

$$\begin{aligned}
&k' = n-k-1-2k+2k,\\
\Rightarrow\ &k' = (n-2k)+k-1.
\end{aligned}$$

حال A' را به توان ۲ می رسانیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A'^{2} &= (J-I-A)^{2} = J^{2} - JI - JA - IJ + I^{2} + IA - AJ + AI + A^{2} \\ &= nJ - J - kJ - J + I + A - kJ + A + A^{2} \\ &= nJ - 2J - 2kJ + I + 2A + A^{2}. \end{aligned}$$

از تساوی فوق و از (۵) داریم:

$$\begin{aligned} A'^{2} &= (n-2k-2)J + I + 2A + (\lambda A + tI + \mu(J-I-A)) \\ &= (n-2k-2)J + I + 2A + \lambda A + tI + \mu J - \mu I - \mu A \\ &= (n-2k-2+\mu)J - I(\mu - t - 1) - A(\mu - \lambda - 2) \\ &= (n-2k-2+\mu)J - ((n-2k-1) + (\mu - t - 1) - (n-2k-1))I \\ &\quad - A((n-2k) + (\mu-\lambda-2) - (n-2k)) \\ &= (n-2k+\mu-2)J - (n-2k+\mu-2)I - (2k-n-t+1)I \\ &\quad - (n-2k+\mu-2)A - A(2k-n-\lambda) \\ &= (n-2k+\mu-2)(J-I-A) + (n-2k+t-1)I + (n-2k+\lambda)A, \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$A'^{2} = \lambda' A' + t' I + \mu'(J-I-A').$$

که در آن $\mu' = (n-2k) + \lambda$ ، $\lambda' = (n-2k) + \mu - 2$ و $t' = (n-2k) + t - 1$ می‌باشد. $\square$

در زیر اثبات دیگری برای لم فوق از نظریه گراف ارائه می‌دهیم:

اثبات. فرض کنید دو رأس a و b در گراف Γ مجاور باشند، آن‌گاه λ تا همسایگی مشترک وجود دارد؛ از طرف دیگر چون گراف k−منظم است، پس $2k-\lambda$ تا رأس به رئوس a و b وصل هستند. حال این دو رأس در گراف $\overline{\Gamma}$ غیرمجاور می‌باشند، لذا رئوس a و b، $n-(2k-\lambda)$ تا همسایگی مشترک دارند، پس $\mu' = n - 2k + \lambda$. اکنون فرض کنید دو رأس a و b در گراف Γ غیر مجاور باشند، پس μ تا همسایگی مشترک دارند. بنابراین $2k-\mu$ تا رأس به این رئوس وصل هستند. از طرفی این دو رأس در گراف $\overline{\Gamma}$ مجاور می‌باشند، در نتیجه $n-(2k-\mu)-2$ تا همسایگی

مشترک دارند، لذا $\lambda' = n - (2k - \mu) - 2$. حال یک رأس a در گراف Γ، t یال غیرجهت‌دار دارد. بنابراین $2k - t$ تا رأس دیگر به رأس a وصل می‌باشند. در نتیجه رأس a در گراف $\overline{\Gamma}$، $n - (2k - t) - 1$ یال غیرجهت‌دار دارد. به عبارت دیگر $t' = n - (2k - t) - 1$ است. به آسانی دیده می‌شود که $k' = n - k - 1$. □

تعریف ۱۰.۲. مقادیر ویژه ماتریس را به همراه تکرار آن‌ها، *طیف یک ماتریس* می‌گوییم. طیف یک ماتریس را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} m_1, \dots, m_n \\ \lambda_1, \ \dots \ , \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$، مقادیر ویژه ماتریس به ترتیب با تکرار $m_1, \cdots, m_n$ می‌باشند.

قضیه ۱۱.۲. *(داول) فرض کنید Γ یک گراف به طور قوی منظم جهت‌دار با پارامترهای (n, k, μ, λ, t) و ماتریس مجاورت A باشد، که Γ در یکی از شرایط زیر صدق نمی‌کند:*

۱. *یک گراف به طور قوی منظم* $(t = k)$،

۲. *یک گراف کامل* $(A = J - I)$.

در این‌صورت A با یک ماتریس هادامارد معادل است، به طوری‌که $A + A^t = J - I, AA^t = (\mu - 1)J + \mu I$؛ یا عدد صحیح مثبت d وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$k(k + (\mu - \lambda)) = t + (n - 1)\mu, \tag{9}$$

$$(\mu - \lambda)^2 + 4(t - \mu) = d^2, \tag{10}$$

$$d | 2k - (\mu - \lambda)(n - 1), \tag{11}$$

$$\frac{2k - (\mu - \lambda)(n - 1)}{d} \equiv n - 1 (mod 2), \tag{12}$$

$$|\frac{2k - (\mu - \lambda)(n - 1)}{d}| \leq n - 1. \tag{13}$$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه کنید. □

نتیجه ۱۲.۲. *در این مقاله به طور مختصر گراف‌های به طور قوی منظم جهت‌دار را به عنوان تعمیمی از گراف‌های به طور قوی منظم مورد بررسی قرار دادیم.*

مراجع

[1] R. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math, **13**(1963) 389-419.

[2] A. Duval, *A directed version of strongly regular graphs*, J. Combin. Theory Ser, A **47** (1988) 71-100.

[3] J. Siedel, *Strongly regular graphs of* $L_۲$*-type and of triangular type*, Indag. Math. **29** (1967) 188-196.

[4] J. J. Siedel, Strongly regular graphs of $L_۲$-type and of triangular type, Indag. Math. 29 (1967)