



پاسخ تشریحی آزمون سراسری سال ۹۳  
درس ریاضی، رشته ریاضی و فیزیک

نگارش:

ابوالفضل معدنی پور

فارغ التحصیل مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف

☎ : 09356061745

✉ : [abolfazl.madanipour@gmail.com](mailto:abolfazl.madanipour@gmail.com)

۱۰۱- حاصل عبارت  $\sqrt[3]{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3})$  ، کدام است؟

$\sqrt{3}(1)$   $2(2)$   $1+\sqrt{3}(3)$   $2\sqrt{3}(4)$

✎ اگر عبارت را  $x$  فرض کنیم:

$$x = (\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2}\sqrt{2} \Rightarrow x^3 = \left[ (\sqrt{2}-\sqrt{3})^3 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \right] \cdot \sqrt[3]{(2\sqrt{2})^3}$$

$$= \left[ (2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{4-3} \right] \sqrt[3]{8} = 6 \times 2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۴

۱۰۲- دو تابع با ضابطه‌های  $\{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$  و  $f(x) = 2x - 5$  مفروض‌اند، اگر  $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$  باشد،  $a$  کدام است؟

$4(4)$   $3(3)$   $2(2)$   $1(1)$

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow f(6) = g(a) = 2 \times 6 - 5 \Rightarrow g(a) = 7 \Rightarrow a = 4$$

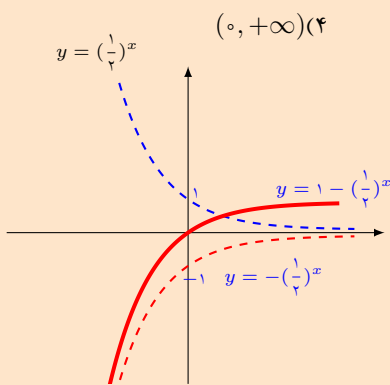


گزینه ۴

۱۰۳- اگر  $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$  باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  کدام بازه است؟

$(-\infty, +\infty)(3)$   $(0, +\infty)(4)$   $[-\infty, 0](2)$   $[-1, 1](1)$

✎ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



باید زیر رادیکال نامنفی باشد، یعنی:  $xf(x) \geq 0$  پس در واقع هر جا که  $x$  و  $f(x)$  هم‌علامت باشند یا یکی از آن دو صفر باشد جواب مسئله خواهد بود، که در اینجا تمام نمودار این شرایط را دارد، بنابراین دامنه تمام اعداد حقیقی خواهد شد

گزینه ۳

۱۰۴- مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹، ۱۲ واحد، کدام است؟

$14\sqrt{5}(4)$   $12\sqrt{5}(3)$   $14\sqrt{3}(2)$   $15\sqrt{2}(1)$

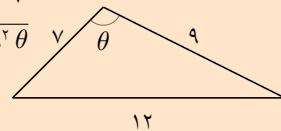
✎ روش اول:

قضیه کسینوس‌ها:  $12^2 = 9^2 + 7^2 - 2(9)(7) \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{81 + 49 - 144}{2 \times 9 \times 7} = \frac{-14}{14 \times 9} = -\frac{1}{9}$$

$$S = \frac{1}{2}(7)(9) \sin \theta = \frac{1}{2}(7)(9) \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2}(7)(9) \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{1}{2}(7)(9) \frac{4\sqrt{5}}{9} = 14\sqrt{5}$$



گزینه ۴

روش دوم: «قضیه هرون»:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{7+9+12}{2} = 14 \Rightarrow S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} =$$

$$\sqrt{14(7)(5)(2)} = \sqrt{14 \times 14 \times 5} = 14\sqrt{5}$$

۱۰۵- حاصل عبارت  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  ، کدام است؟

$5(4)$   $4(3)$   $3(2)$   $2(1)$

$$\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{t^6(t^3 + 1) + t^3 + 1} = \frac{t^{12} - 1}{(t - 1)(t^3 + 1)(t^6 + 1)} = \frac{t^6 - 1}{(t - 1)(t^3 + 1)}$$

$$= \frac{t^6 - 1}{t - 1} = t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{t})^2 + \frac{3}{t} = (\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} = (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = 2$$

گزینه ۱

۱۰۶- نقطه‌ای با کدام طول روی محور  $x$  ها انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطه‌ی  $A(1, 5)$  و  $B(7, -2)$  بیشترین مقدار را داشته باشد؟

$11(4)$   $10(3)$   $9(2)$   $8(1)$

باید  $|XA| - |XB|$  ماکزیمم باشد.

$$s = |XA| - |XB| = \sqrt{(x-1)^2 + (0-5)^2} - \sqrt{(x-7)^2 + (0+2)^2} =$$

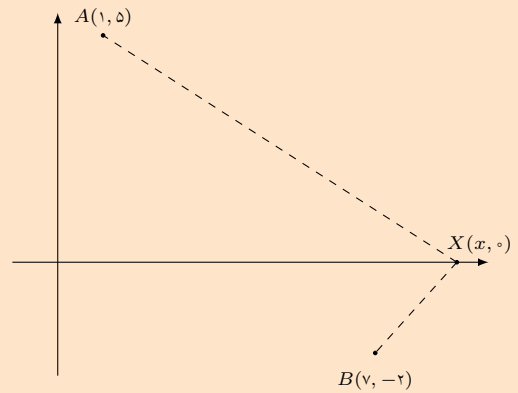
$$\xrightarrow{x-1=t} s = \sqrt{t^2 + 25} - \sqrt{(t-6)^2 + 4} \Rightarrow s'_t = 0$$

$$\frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 25}} - \frac{2(t-6)}{2\sqrt{(t-6)^2 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{t^2 + 25}} = \frac{(t-6)}{\sqrt{(t-6)^2 + 4}} \Rightarrow$$

$$\frac{t^2}{t^2 + 25} = \frac{(t-6)^2}{(t-6)^2 + 4} \Rightarrow t^2(t-6)^2 + 4t^2 = t^2(t-6)^2 + 25(t-6)^2$$

$$4t^2 - 25(t-6)^2 = 0 \Rightarrow (2t - 5(t-6))(2t + 5(t-6)) = 0 \Rightarrow$$

$$(-3t + 30)(7t - 30) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \Rightarrow x = 11 \\ t = \frac{30}{7} \Rightarrow x + \frac{30}{7} \end{cases} \quad \text{گزینه ۴}$$



۱۰۷- در کدام بازه از مقادیر  $x$  نمودار تابع  $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$  در بالای نمودار تابع  $y = |x - 3| + 2$  قرار دارد؟

$$(2, 2 + \sqrt{15})(4) \quad (2, \frac{4 + \sqrt{15}}{2})(3) \quad (2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2})(2) \quad (\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, 5)(1)$$

$$5 + 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 5$$

ابتدا دامنه رادیکال:

$$\sqrt{5 + 4x - x^2} > |x - 3| + 2 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow \sqrt{5 + 4x - x^2} > x - 1 \Rightarrow 5 + 4x - x^2 > x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 4 < 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x - 2 < 0, \Delta = 17, x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x \geq 3 \text{ اشتراک با دامنه} \Rightarrow 3 \leq x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x < 3 \Rightarrow \sqrt{5 + 4x - x^2} > -x + 5 \Rightarrow 5 + 4x - x^2 > x^2 - 10x + 25 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 < 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x < 3 \text{ اشتراک با دامنه} \Rightarrow 2 < x < 3 \Rightarrow \text{جواب} \Rightarrow (2, 3) \cup [\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, 5) = (2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2})$$

گزینه ۲

۱۰۸- اگر  $g(x) = 2x - 3$  و  $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$  باشند، تابع  $f(x)$  کدام است؟

$$x^2 - 2x + 3(4) \quad x^2 - 2x + 5(3) \quad x^2 - 4x + 5(2) \quad x^2 - 4x + 3(1)$$

$$g(x) = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{g+3}{2}, (f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5) = 4[(x-2)^2 + 1] =$$

$$= 4 \left[ \left( \frac{g+3}{2} - 2 \right)^2 + 1 \right] = 4 \left[ \left( \frac{g-1}{2} \right)^2 + 1 \right] = 4 \left[ \frac{(g-1)^2}{4} + 1 \right] = (g-1)^2 + 4 = g^2 - 2g + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

گزینه ۳

۱۰۹- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos x$  کدام است؟

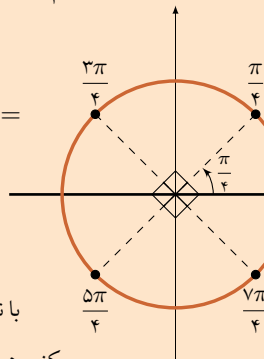
$$k\pi + \frac{\pi}{4}(4) \quad k\pi - \frac{\pi}{4}(3) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(2) \quad \frac{k\pi}{2}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta}{\sin \theta} = 2(1 - \sin^2 \theta) \Rightarrow \frac{\sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta)}{\sin \theta} = 2(1 - \sin^2 \theta) \Rightarrow 3 - 4 \sin^2 \theta = 2 - 2 \sin^2 \theta \Rightarrow 2 \sin^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \theta'_0 = \frac{5\pi}{4}, \theta = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

با توجه به دایره مثلثاتی مشخص می‌شود که اگر به  $\frac{\pi}{4}$  مضرب‌های صحیح  $\frac{\pi}{4}$  را اضافه

کنیم تمامی جواب‌ها بدست می‌آید. پس:  $x = k\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$



فرمول‌های مثلثاتی  $3\theta$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

گزینه ۲

۱۱۰- حاصل  $\cos(3 \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3})$  کدام است؟

$$-\frac{4}{9}(4) \quad -\frac{5}{9}(3) \quad -\frac{19}{27}(2) \quad -\frac{23}{27}(1)$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{\text{در ربع اول}} \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \frac{4}{27} - 1 = -\frac{23}{27}$$

گزینه ۱

۱۱۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{3}{4}$       ۲)  $-\frac{3}{4}$       ۳)  $-\frac{1}{4}$       ۴)  $\frac{3}{4}$

هم‌ارزی:  $\sqrt[n]{1+u} \sim_{u \rightarrow 0} 1 + \frac{u}{n}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - (1 - \frac{x^2}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^2} = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۲

۱۱۲- مشتق تابع  $y = \cos^2(\tan^{-1} x)$  به ازای  $x = 1$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{2}$       ۲)  $-\frac{1}{4}$       ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴)  $1$

$y = \cos^2 u \Rightarrow y' = -2u' \cos u \sin u = -u' \sin 2u = -(\frac{1}{1+x^2}) \sin(2 \tan^{-1} x) \Big|_{x=1} = -\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$

گزینه ۱

۱۱۳- به ازای مقادیر  $n_0$ ،  $n \geq n_0$ ، اگر فاصله نقاط نظیر دنباله  $\left\{ \frac{4n+1}{3n-2} \right\}$  از نقطه همگرایی خود، کمتر از  $0.02$  باشد، کوچک‌ترین مقدار  $n_0$  کدام است؟

- ۱)  $61$       ۲)  $62$       ۳)  $63$       ۴)  $64$

$|a_n - L| < 0.02 \Rightarrow \left| \frac{4n+1}{3n-2} - \frac{4}{3} \right| < \frac{2}{100} \Rightarrow \left| \frac{12n+3-12n+8}{(3n-2)(3)} \right| < \frac{2}{100} \Rightarrow \left| \frac{11}{(3n-2)(3)} \right| < \frac{2}{100}$

$$\Rightarrow \frac{(3n-2)(3)}{11} > \frac{100}{2} = 50 \Rightarrow (3n-2)(3) > 550 \Rightarrow 9n-6 > 550 \Rightarrow 9n > 556 \Rightarrow n > \frac{556}{9} = 61.77 \Rightarrow n \geq 62$$

گزینه ۲

۱۱۴- حد عبارت  $x \left[ \frac{1}{x} \right]$ ، در کدام حالت عدد متناهی نیست؟

- ۱)  $x \rightarrow 0^-$       ۲)  $x \rightarrow 0^+$       ۳)  $x \rightarrow -\infty$       ۴)  $x \rightarrow +\infty$



نکته

در بینهایت می‌توان جزء صحیح را برداشت:

$$[u] \sim_{u \rightarrow \pm\infty} u$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x \left[ \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x \times \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \text{متناهی}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[ \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x [0^-] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times (-1) = +\infty \Rightarrow \text{نامتناهی}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x [0^+] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times (0) = 0 \Rightarrow \text{متناهی}$$

گزینه ۳

۱۱۵- تابع با ضابطه  $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x$  در نقاط  $x \in Z$  از نظر پیوستگی، چگونه است؟

- ۱) فقط در اعداد زوج پیوسته      ۲) فقط در اعداد فرد پیوسته      ۳) همواره نا پیوسته      ۴) همواره پیوسته

تابع اصلی، از حاصل ضرب دو تابع تشکیل شده است:  $h(x) = \sin \frac{\pi}{4} x$ ،  $g(x) = (-1)^{[x]}$ ، تابع  $g$  در همه نقاط صحیح ناپیوسته، و تابع  $h$  در همه نقاط صحیح پیوسته است. پس ضرب آن‌ها در نقاط صحیح ناپیوسته خواهد بود، به جز در نقاطی حد یکی از توابع و مقدار آن برابر صفر باشد و تابع دیگر در همسایگی آن نقطه کران‌دار باشد، که در این صورت حد و مقدار تابع اصلی هم صفر خواهد شد و پیوسته می‌شود. در  $x$ های زوج این حالت وجود دارد، زیرا در این نقاط حد تابع  $\sin \frac{\pi}{4} x$  و مقدار آن برابر صفر است و  $(-1)^{[x]}$  هم کران‌دار است. اما در نقاط فرد این گونه نیست. پس تنها در  $x$ های زوج پیوسته می‌باشد.

گزینه ۱

۱۱۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x^2+ax+b} = -\infty$  باشد،  $a+b$  کدام است؟

- ۱)  $-3$       ۲)  $3$       ۳)  $6$       ۴)  $12$

$x = 3$  باید ریشه مخرج باشد تا حد بینهایت شود. اما اگر ریشه ساده باشد قبل و بعد از  $x = 3$  مخرج تغییر علامت می‌دهد، و حد به صورت  $\pm\infty$  می‌شود. پس باید ریشه مضاعف باشد. بنابراین  $x = 3$  ریشه مخرج و ریشه مشتق آن است.

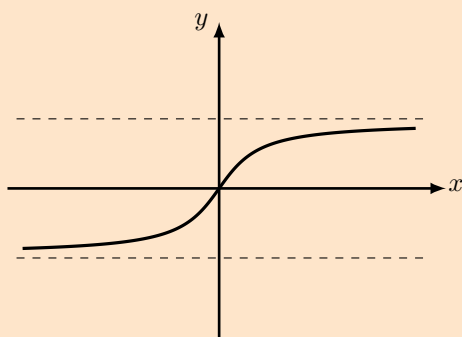
$$18 + 3a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = -18$$

$$4x + a = 0 \Rightarrow x = \frac{-a}{4} = 3 \Rightarrow a = -12, b = -18 - 3a = -18 + 36 = 18 \Rightarrow a + b = -12 + 18 = 6$$

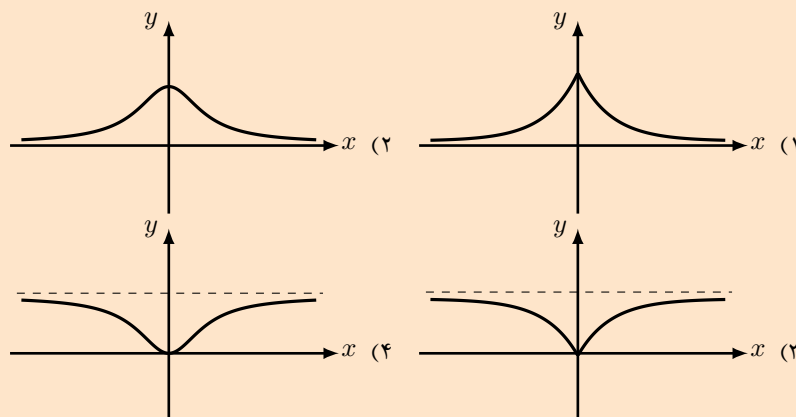
گزینه ۳



۱۱۷- شکل روبرو نمودار تابع  $y = f(x)$  است. نمودار  $f'(x)$  به کدام صورت است؟



گزینه ۱ و گزینه ۲



تابع در مبدأ مماس مایل دارد، پس  $f'(0) \neq 0$  پس گزینه ۳ و ۴ حذف می‌شوند. همچنین تابع در مبدأ نقطه عطف دارد، یعنی در مبدأ، مماس پذیر است و مشتق دوم (یعنی مشتق اول مشتق) تغییر علامت می‌دهد، پس  $f'$  قبل از صفر صعودی و بعد از آن نزولی است. اگر مشتق دوم در  $x = 0$  وجود داشته باشد برابر صفر است، مانند تابع  $y = \tan^{-1} x$  که در این صورت، جواب گزینه ۲ است، و اگر ناموجود باشد مانند تابع  $y = \frac{x}{1+|x|}$ ، جواب گزینه ۱ خواهد بود. (لزومی ندارد که  $f''$  در صفر موجود باشد)

۱۱۸- از نقطه  $A(2, -1)$  دو خط مماس بر منحنی  $y = \frac{1}{4}x^2 - x$  رسم شده است، زاویه بین دو خط مماس کدام است؟  
 $\frac{\pi}{4}$  (۱)  $\frac{\pi}{3}$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)

سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x \Rightarrow 4y = x^2 - 4x \Rightarrow 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 4(y+1) \Rightarrow S = (2, -1), p = \frac{1}{4}$$

$$\text{دو مماس بر هم عمودند...} \Rightarrow A \Rightarrow \text{روی خط هادی است} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{خط هادی}$$

از روی خط هادی سهمی همیشه دو مماس عمود بر هم، بر سهمی رسم می‌شود.

گزینه ۳

۱۱۹- مشتق راست تابع با ضابطه  $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt{9x}$ ، در نقطه  $x = -3$  کدام است؟

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow f(x) = (-3 - (-x))\sqrt{9x} = (-3 + x)\sqrt{9x} \Rightarrow f'_+(x) = \sqrt{9x} + \frac{9}{2\sqrt{9x}}(-3 + x)$$

$$f'_+(-3) = \sqrt{-27} + \frac{9}{3\sqrt{(-27)^2}} = -3 + \frac{9}{3(9)}(-6) = -3 - 2 = -5$$

گزینه ۲

۱۲۰- خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادله  $2y + x = 7$  می‌باشد. اگر  $g(x) = \frac{1}{x}f^{-1}(x)$ ، آنگاه  $g'(2)$  کدام است؟

$$(a, b) \in f \Rightarrow f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}f^{-1}(x) + \frac{1}{x}f^{-1}'(x) \Rightarrow g'(2) = -\frac{1}{2^2}f^{-1}(2) + \frac{1}{2}f^{-1}'(2) = -\frac{1}{4}(3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f'(3)} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$$

گزینه ۱

۱۲۱- در کدام بازه، تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 e^{-x}$  صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3 - x)e^{-x} \geq 0 \Rightarrow x < 3$$

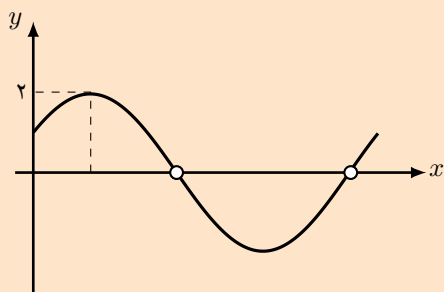
$$f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} - (3x^2 - x^3)e^{-x} = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x} = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x} > 0$$

$$x(x^2 - 6x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

$x$	$0$	$3 - \sqrt{3}$	$3 + \sqrt{3}$
$x$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 6x + 6$	$+$	$+$	$-$
$P$	$-$	$+$	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت  $f''$  و اشتراک آن با  $x < 3$  جواب مسئله  $(0, 3 - \sqrt{3})$  خواهد بود.

گزینه ۱



۱۲۲- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{a \sin 2x + b}{\sin x + \cos x}$  در یک دوره تناوب است،  $a$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴) ۲

تایع در دو نقطه تعریف نشده که با توجه به ضابطه، این دو نقطه باید ریشه‌های مخرج باشند:

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

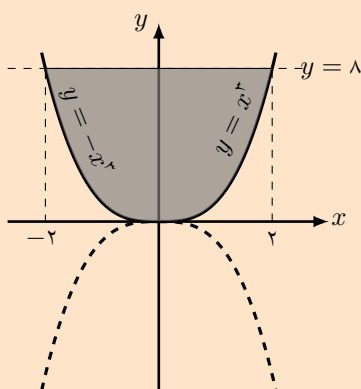
تایع در این دو نقطه حد دارد و چون حد مخرج کسر صفر شده حتما باید حد صورت هم صفر شود، زیرا در غیر این صورت حد کل کسر بینهایت خواهد شد. پس:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (a \sin 2x + b) = 0 \Rightarrow a \sin 2 \times \frac{3\pi}{4} = -b \Rightarrow a \sin \frac{3\pi}{2} = -b \Rightarrow -a = -b \Rightarrow a = b \Rightarrow f(x) = \frac{a(\sin 2x + 1)}{\sin x + \cos x} =$$

$$\frac{a(2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{a(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} \xrightarrow{\sin x \neq -\cos x} f(x) = a(\sin x + \cos x) = a\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\max(f) = 2 = a(\sqrt{2}) \times \max\left(\sin(x + \frac{\pi}{4})\right) = a(\sqrt{2}) \times 1 \Rightarrow a(\sqrt{2}) = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

گزینه ۳



۱۲۳- مساحت ناحیه مربوط به نمودار تابع  $y = x^2|x|$  و خط به معادله  $y = 8$  کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

$$S = \text{مساحت مستطیل} - 2 \times \int_0^2 x^2 dx = 4 \times 8 - 2 \times \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = 32 - 8 = 24$$

گزینه ۴

۱۲۴- حاصل  $\int_1^{16} [\sqrt{x}] dx$  کدام است؟ [ ] به مفهوم جزء صحیح است

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

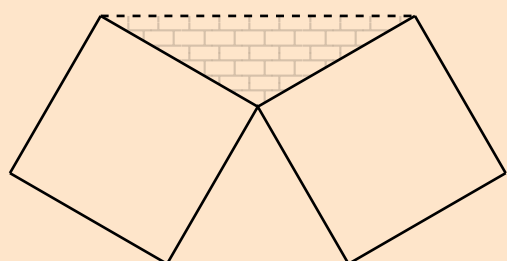
بازه انتگرال را به بازه‌هایی تقسیم می‌کنیم که در آن،  $\sqrt{x}$  بین دو عدد صحیح متوالی باشد.

$$\begin{cases} [1, 4] \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1 \\ [4, 9] \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2 \\ [9, 16] \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3 \end{cases}$$

$$\int_1^{16} [\sqrt{x}] dx = \int_1^4 (1) dx + \int_4^9 (2) dx + \int_9^{16} (3) dx = 1(4-1) + 2(9-4) + 3(16-9) = 3 + 10 + 21 = 34$$

گزینه ۴

۱۲۵- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\sqrt{3}$

مثلث سایه‌زده، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

$$120^\circ = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$$

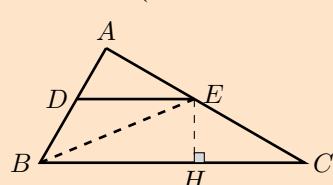
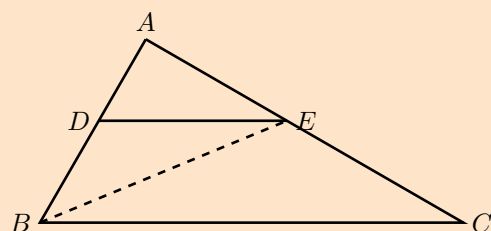
$$\text{مثلث متساوی‌الاضلاع} S = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)(a^2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

گزینه ۳

$$\frac{\text{مثلث سایه‌زده}}{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}} = 1$$

۱۲۶- در مثلث  $ABC$  پاره خط  $DE$  موازی ضلع  $BC$  و  $AD = \frac{4}{5} DB$  است. مساحت مثلث  $EBC$  چند برابر مساحت مثلث  $EBD$  است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{25}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{2}{75}$



گزینه ۲

(چون  $DE$  و  $BC$  موازیند) ارتفاع  $EH$  هر دو مثلث  $EBC$  و  $EBD$  است، پس:

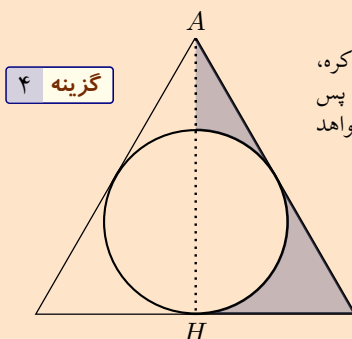
$$\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times EH}{\frac{1}{2} DE \times EH} = \frac{BC}{DE} \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{AB}{AD} = \frac{AD + DB}{AD} = \frac{\frac{4}{5} DB + DB}{\frac{4}{5} DB} = \frac{\frac{4}{5} + 1}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{9}{4} = 2.25$$

۱۲۷- در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $2\sqrt{3}$  واحد، حجم حاصل از دوران هر دو سطح سایه زده شده، در حول ارتفاع  $AH$  کدام است؟

$\frac{5\pi}{3}$  (۴)       $2\pi$  (۳)       $\frac{3\pi}{2}$  (۲)       $\frac{4\pi}{3}$  (۱)

حجم مخروط = حجم کره - حجم مخروط =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi R^3$

شعاع قاعده مخروط نصف ضلع مثلث، و ارتفاع آن، همان ارتفاع مثلث می باشد، برای یافتن شعاع کره، چون محل برخورد میانه ها و نیمسازها و ارتفاع های مثلث متساوی الاضلاع، همه برهم منطبق اند، پس مرکز دایره ی محاطی نیز همین نقطه می باشد و شعاع آن یک سوم میانه (که همان ارتفاع است) خواهد بود.



گزینه ۴

$$r = \sqrt{3}, h = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}) = 3, R = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}(3) = 1$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2(3) - \frac{4}{3}\pi(1)^3 = 3\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{5\pi}{3}$$

۱۲۸- در یک دوزنقه متساوی الساقین، یکی از زاویه ها  $60^\circ$  درجه و اندازه قاعده ها ۶ و ۱۰ واحد است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این دوزنقه

چند برابر  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

مثلث های  $MM'F$  و  $DM'B$  و  $ACM$  متساوی الاضلاع هستند. در مثلث  $AEB$  ارتفاع وارد بر ضلع  $AB$  برابر است با:

$$\tan 30^\circ = \frac{EH''}{AH''} \Rightarrow EH'' = AH'' \times \tan 30^\circ =$$

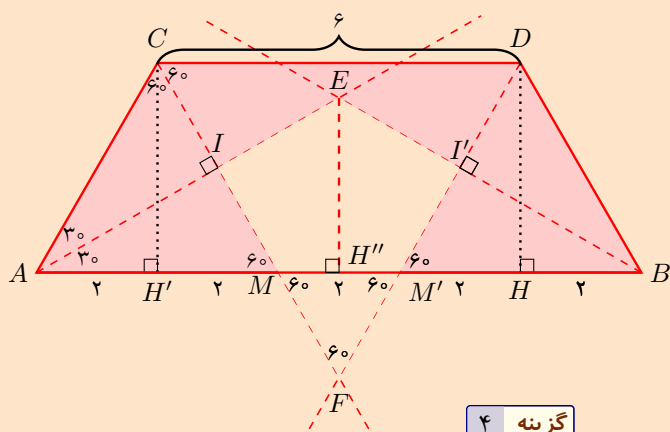
$$5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow EH'' = \frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$S_{IEI'F} = S_{IEI'M'M} + S_{MM'F} = S_{AEB} - 2 \times S_{AIM} + S_{MM'F}$$

$$= S_{AEB} - S_{ACM} + S_{MM'F} =$$

$$\frac{1}{2}(AB)(EH'') - \frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(10)\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{(25 - 12 + 3)(\sqrt{3})}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$



گزینه ۴

۱۲۹- در مثلث  $ABC$  ضلع  $AC = 6$  و میانه  $BM = 5$ ، نیمسازهای دو زاویه  $AMB$  و  $CMB$  دو ضلع دیگر این مثلث را در  $P$  و  $Q$  قطع می کنند. اندازه  $PQ$  کدام است؟

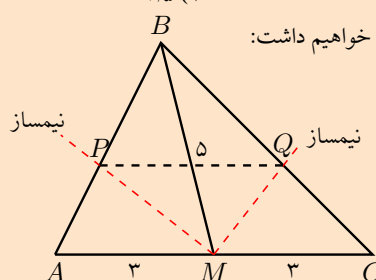
۴ (۴)

۳٫۷۵ (۳)

۳٫۵ (۲)

۳٫۲۵ (۱)

با رسم شکل خواهیم داشت:



گزینه ۳

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع مقابل آن زاویه را به نسبت اضلاع مجاور آن، قطع می کند.

پس در مثلث های  $AMB$  و  $BMC$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{BP}{AP} = \frac{5}{3} \\ \frac{BQ}{QC} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BQ}{QC} \xRightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel AC$$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{AB} \xRightarrow{\frac{BP}{AP} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}} \frac{PQ}{6} = \frac{5}{8} \Rightarrow PQ = \frac{30}{8} = 3.75$$

۱۳۰- در شکل مقابل  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  حاصل  $AD \times BC$  برابر کدام است؟

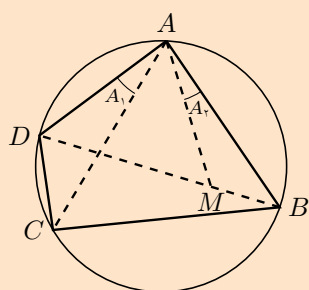
$BD \times BM$  (۴)

$AB \times CD$  (۳)

$BM \times AC$  (۲)

$DM \times AC$  (۱)

در این گونه مسائل، باید دو مثلث متشابه پیدا کنیم که هریک از پاره خط های داده شده، ضلع یکی از مثلث ها باشد.



$$\begin{cases} \hat{ADM} = \hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{DAM} = \hat{A}_1 + \hat{CAM} = \hat{A}_2 + \hat{CAM} = \hat{CAB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{ADM} \simeq \hat{ACB} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \times BC = DM \times AC$$

گزینه ۱

۱۳۱- تصویر خط به معادله  $2x + 3y = 6$  ، تحت تبدیل  $T(x, y) = (2y - 1, x + 3)$  ، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

- (۱)  $(-3, 2)$  (۲)  $(1, -1)$  (۳)  $(5, 0)$  (۴)  $(7, 0)$

معادله خط داده شده به صورت  $y = 2 - \frac{2}{3}x$  است، اگر تصویر هر نقطه به صورت  $(X, Y)$  باشد:

$$(X, Y) = T(x, y) = (2y - 1, x + 3) =$$

$$(2 - \frac{2}{3}x - 1, x + 3) = (1 - \frac{2}{3}x, x + 3) \Rightarrow \begin{cases} X = 1 - \frac{2}{3}x \\ Y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3X = 3 - 2x \\ 3Y = 3x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3X = 9 - 4x \\ 4Y = 4x + 12 \end{cases} \Rightarrow 3X + 4Y = 21 \Rightarrow (7, 0)$$

گزینه ۴

۱۳۲- دو خط متنافر  $d$  و  $d'$  و نقطه  $A$  مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطه  $A$  خطی بگذرد و بر هر دو خط  $d$  و  $d'$  عمود باشد، تعداد جواب کدام است؟

- (۱) فاقد جواب (۲) همواره یک جواب (۳) بیشمار جواب (۴) یک جواب یا فاقد جواب

می‌دانیم که هر دو خط متنافر دقیقاً یک عمود مشترک دارند، پس جواب مسئله باید با این خط موازی باشد، و روشن است که همواره تنها یک خط وجود دارد که با عمود مشترک موازی باشد و از نقطه  $A$  بگذرد. نکته گمراه‌کننده این سوال این است که ممکن است این اشتباه ایجاد شود که خطی که از  $A$  می‌گذرد، باید دو خط داده شده را لزوماً قطع کند. در حالی که عمود بودن دو خط یعنی این دو خط، صرفاً بردارهای هادی عمود برهم داشته باشند.

گزینه ۲

۱۳۳- سه نقطه  $A(2, 1, 0)$  و  $B(3, -1, 2)$  و  $C(-1, 1, 3)$ ، رأس‌های مثلثی هستند،  $\cos A$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

می‌توانیم از فرمول هندسی ضرب داخلی بردارها استفاده کنیم:

$$\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} \quad \begin{cases} \vec{AB} = B - A = (1, -2, 2) \\ \vec{AC} = C - A = (-3, 0, 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{9} = 3, |\vec{AC}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 + 0 + 6 = 3$$

$$\cos A = \frac{3}{3(3\sqrt{2})} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

گزینه ۱

۱۳۴- دو بردار با تصاویر  $a = (1, -2, 3)$  و  $b = (2, 1, -1)$  مفروض هستند. حجم متوازی‌سطوح که بر روی سه بردار  $a$  و  $b$  و  $a \times b$  ساخته می‌شود کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۷۲ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

$$|c \cdot (a \times b)| = |(a \times b) \cdot (a \times b)| = |a \times b|^2$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 7, 5) \Rightarrow |a \times b|^2 = (-1)^2 + 7^2 + 5^2 = 75$$

گزینه ۳

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  برابر است با:

$$|c \cdot (a \times b)|$$

۱۳۵- طول عمود مشترک دو خط به معادلات  $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = 3y - 2 \end{cases}$  و  $\begin{cases} x - 2 = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z}{3} \end{cases}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{6}$

ابتدا معادله خط دوم را به صورت متقارن می‌نویسیم:

$$d' : \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = 3y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{2} \\ y = \frac{z+2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$$

$$d : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow P = (2, -2, 0), P' = (-1, 0, -2)$$

$$\vec{PP'} = P' - P = (-3, 2, -2), u = (1, -1, 3), u' = (2, 1, 3)$$

نکته

طول عمود مشترک دو خط متنافر  $d$  و  $d'$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{|(u \times u') \cdot (\vec{PP'})|}{|u \times u'|}$$

$P$  و  $P'$  دو نقطه دلخواه روی هر یک از خط‌ها هستند.

$$u \times u' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, 3, 3) \Rightarrow (u \times u') \cdot (\vec{PP'}) = (-6, 3, 3) \cdot (-3, 2, -2) = 18 + 6 - 6 = 18$$

$$|u \times u'| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \Rightarrow \text{طول عمود مشترک} = \frac{18}{3\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

گزینه ۲



۱۳۶- در بیضی به معادله  $3x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 5$  ، مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن، کدام است؟

۸ (۴)

$4\sqrt{3}$  (۳)

۶ (۲)

$4\sqrt{2}$  (۱)



طبق تعریف، در هر بیضی مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی از دو کانون آن مقداری ثابت و برابر  $2a$  است که همان قطر بزرگ بیضی می باشد.

$$3x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 5 \Rightarrow 3(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 4y) = 5 \Rightarrow 3(x+3)^2 + 4(y-2)^2 = 5 + 27 + 16 = 48 \Rightarrow$$

$$\frac{3(x+3)^2}{48} + \frac{4(y-2)^2}{48} = 1 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1 \xrightarrow{\text{بیضی افقی}} a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 8$$

گزینه ۴

۱۳۷- دو خط به معادلات  $y = 2x + 4$  و  $y = -2x$  ، مجانب‌های یک هذلولی و  $M(\frac{3}{2}, 5)$  یکی از نقاط آن است. فاصله دو کانون این هذلولی کدام است؟

$4\sqrt{5}$  (۴)

$4\sqrt{3}$  (۳)

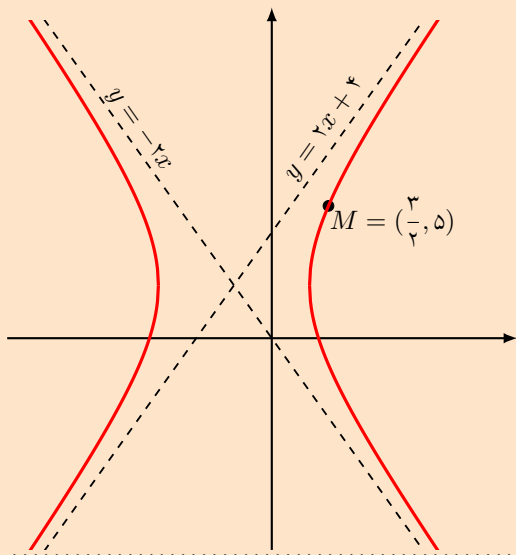
$2\sqrt{5}$  (۲)

$2\sqrt{3}$  (۱)



$$\begin{cases} y = -2x \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow -2x = 2x + 4 \Rightarrow -4x = 4 \Rightarrow x = -1, y = 2 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (-1, 2)$$

محل برخورد دو مجانب، مرکز هذلولی است: برای اینکه بدانیم هذلولی افقی است یا قائم، کافی است بدانیم که نقطه  $M$  نسبت به دو مجانب کجا قرار می گیرد.



$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \begin{cases} y = -2x = -2(\frac{3}{2}) = -3 \\ y = 2x + 4 = 2(\frac{3}{2}) + 4 = 7; -3 < 5 < 7 \end{cases} \Rightarrow \text{هذلولی افقی}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{معادله دو مجانب: } \frac{x-\alpha}{a} = \pm \frac{y-\beta}{b}$$

$$\Rightarrow \text{شیب دو مجانب: } \pm \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{4a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \text{مختصات } M \text{ در معادله هذلولی صدق می کند} \Rightarrow 4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 4a^2$$

$$4(\frac{3}{2}+1)^2 - (5-2)^2 = 4a^2 \Rightarrow 25 - 9 = 16 = 4a^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b = 4 \text{ فاصله دو کانون} = 2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

گزینه ۴

$$138- \text{اگر دترمینان } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix} = D \text{ باشد، حاصل دترمینان } \begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$abcD$  (۴)

$(a+b+c)D$  (۳)

$D$  (۲)

$-D$  (۱)

در دترمینان اولیه از  $abc$  در سطر دوم و سطر سوم فاکتور می گیریم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix} = (abc)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2 \rightarrow C_1} \begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ac \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{از } ab \text{ در سطر اول، } bc \text{ در سطر دوم و } ac \text{ در سطر سوم فاکتور می گیریم}}$$

$$= (ab)(bc)(ac) \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} = (abc)^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ترانهاده}} (abc)^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(abc)^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = -D$$

گزینه ۱

۱۳۹- اگر  $A$  ماتریس تبدیل  $T(x, y) = (2x - y, 3x - 4y)$  باشد، و  $I$  ماتریس همانی،  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $\alpha A + \beta I = A^{-1}$  ، مقدار  $\beta$  کدام است؟

$\frac{4}{5}$  (۴)

$\frac{2}{5}$  (۳)

$-\frac{1}{5}$  (۲)

$-\frac{3}{5}$  (۱)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول را در نظر می گیریم}} \begin{cases} 2\alpha + \beta = +\frac{4}{5} \\ 3\alpha + 0 = +\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

گزینه ۳

۱۴۰ - سه صفحه با معادله ماتریسی زیر داده شده است. وضعیت فصل مشترک دو به دو صفحات نسبت به هم چگونه است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۲) منطبق بر هم  
(۴) فاقد یکی از فصل مشترکها

(۱) موازی هم  
(۳) عمود بر هم

ابتدا دترمینان ضرایب را پیدا می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -11 & 5 \end{vmatrix} = 2(15 - 11) - 1(-1 - 5) + 1(-11 - 3) = 8 + 6 - 14 = 0$$

وقتی دترمینان ضرایب صفر باشد، یعنی دستگاه جواب منحصر به فرد ندارد. همچنین، هیچ دو صفحه ای با هم موازی نیستند (بردارهای نرمال مضرب هم نیستند). پس دو حالت کلی وجود دارد:

(۱) سه صفحه به صورت مثلثی متقاطع اند و در این صورت فصل مشترکها، سه خط دو به دو با هم موازی هستند که هیچ جوابی نداریم.  $\Delta = 0 \neq \Delta_x$  و  $\Delta_y$  و  $\Delta_z$ .  
(۲) هر سه صفحه در یک خط با هم متقاطع اند که در این صورت بیشمار جواب خواهیم داشت.  $\Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ .  
(در هر دو مورد، اگر تنها یکی از سه دترمینان  $\Delta_x$  و  $\Delta_y$  و  $\Delta_z$  را بررسی کنیم کافی است.)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -11 & 5 \end{vmatrix} = 6(15 - 11) - 1(-2 - 20) + 1(-44 - 6) = 24 + 22 - 50 = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{موازی}$$

گزینه ۱

۱۴۱ - با توجه به جدول آماری دسته بندی شده زیر، مقدار ضریب تغییرات داده های  $x$  کدام است؟

$x - 44$	-3	-1	1	3	5
فراوانی	4	7	5	3	1

۰/۲ (۴)

۰/۱ (۳)

۰/۰۸ (۲)

۰/۰۵ (۱)

$$y_i = x_i - 44 \Rightarrow x_i = y_i + 44 \Rightarrow \bar{x}_i = \bar{y}_i + 44 =$$

$$\frac{-12 - 7 + 5 + 9 + 5}{4 + 7 + 5 + 3 + 1} + 44 = 0 + 44 = 44$$

$$\sigma_{x_i} = \sigma_{(x_i - 44)} = \sigma_{(y_i)} =$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i(\bar{y} - y_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i(0 - y_i)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i(y_i)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(9) + 7(1) + 5(1) + 3(9) + 1(25)}{20}} = \sqrt{\frac{36 + 7 + 5 + 27 + 25}{20}} = \sqrt{\frac{100}{20}} = \sqrt{5} \Rightarrow (C \cdot V)_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{44} \simeq 0.05$$

گزینه ۱

۱۴۲ - نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر  $A$  و  $B$  به صورت زیر است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

$A :$	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹
$B :$	۱۶	۱۴	۱۷	۱۴	۱۷	۱۸

$B(2)$

$A(1)$

(۴) غیر قابل پیش بینی

(۳) یکسان

$$\sigma_A^2 = \frac{2(15 - 16)^2 + (14 - 16)^2 + (16 - 16)^2 + (17 - 16)^2 + (19 - 16)^2}{6}$$

$$= \frac{2 + 4 + 0 + 1 + 9}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2(14 - 16)^2 + 2(17 - 16)^2 + (16 - 16)^2 + (18 - 16)^2}{6}$$

$$\frac{8 + 2 + 0 + 4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \Rightarrow B \text{ دقت بیشتری دارد.}$$

گزینه ۲

$$\bar{x}_A = \frac{15 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19}{6} =$$

$$\frac{60 + 36}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\bar{y}_A = \frac{16 + 14 + 17 + 14 + 17 + 18}{6} =$$

$$\frac{60 + 36}{6} = \frac{96}{6} = 16 \Rightarrow y_A = \bar{x}_A$$

وقتی میانگین ها مساوی باشند، دقت کسی که واریانس کمتری دارد بیشتر است، زیرا ضریب تغییرات کمتری خواهد داشت.

۱۴۳ - هریک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه ای قرار می دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم تا به طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشیم؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

بدترین حالت وقتی اتفاق می افتد که همه اعداد بیرون آمده نسبت به هم اول باشند، یعنی همه اعداد اول کوچکتر از ۳۰ و همچنین عدد ۱، به عبارت بهتر مجموعه  $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ . هر عدد دیگری به جز اعضای این مجموعه انتخاب کنیم، حتما با حداقل یکی از اعضای این مجموعه مقسوم علیه مشترک بزرگتر از یک دارد، پس باید حداقل  $1 + 11 = 12$  عدد انتخاب شود.

گزینه ۳

۱۴۴- اگر  $A = \{x \in \mathbb{N}, 5 < x^2 < 50\}$  و  $B = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 4\}$  باشند، تعداد زیرمجموعه‌های  $(A \times B) \cap (B \times A)$  کدام است؟

۴ (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴)

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2 \Rightarrow |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2, A = \{3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 4, 7, 10\} \Rightarrow$$

$$A \cap B = \{4, 7\} \Rightarrow |A \cap B|^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^2 = 4$$

گزینه ۳

۱۴۵- تعداد افزایندهای مجموعه  $\{a, b, c, d, e\}$  که شامل فقط یک مجموعه تک‌عضوی باشد، کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

اگر افزایندها شامل فقط یک مجموعه تک‌عضوی باشد، دو حالت وجود دارد:

الف) مجموعه بعدی، ۴ عضو است. پس باید از این ۵ عضو، دو گروه ۱ و ۴ عضو بسازیم:

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{4} = 5 \times 1 = 5$$

تذکر:

دلیل تقسیم بر ۲ شدن در حالت (ب) این است که وقتی دو گروه ۲ عضو داریم، از آنجا که ترتیب قرارگیری این دو گروه اهمیت ندارد، پس هر دو حالت را، یکبار حساب می‌کنیم.

ب) چهار عضو دیگر به دو مجموعه ۲ عضو تقسیم شده است، پس باید از این ۵ عضو، سه گروه ۱، ۲ و ۲ عضو بسازیم:

$$\binom{5}{1} \times \frac{\binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{2} = 5 \times \frac{6 \times 1}{2} = 5 \times 3 = 15 \Rightarrow \text{تعداد کل} = 5 + 15 = 20$$

گزینه ۴

۱۴۶- آیا رابطه  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$  روی مجموعه  $\mathbb{R}^2$  هم‌ارزی است. در صورت هم‌ارزی، نمودار  $[(2, 6)]$  از کدام نقطه می‌گذرد؟

هم‌ارزی نیست (۱) (۲, ۲) (۲) (۱, ۳) (۳) (۲, ۳) (۴)

این رابطه هم‌ارزی نیست، زیرا خاصیت تعدی را ندارد:

$$\{(1, 2)R(0, 0)\} \not\Rightarrow (1, 2)R(5, -3)$$

گزینه ۱

۱۴۷- دو تاس را با هم می‌ریزیم، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

۱ (۱)  $\frac{5}{12}$  (۲)  $\frac{4}{9}$  (۳)  $\frac{5}{9}$  (۴)  $\frac{7}{12}$

باید جمع دو عدد رو شده یکی از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ باشد.

$$P(x = \text{عدد اول}) =$$

$$\frac{6 - |7 - 2| + 6 - |7 - 3| + 6 - |7 - 5| + 6 - |7 - 7| + 6 - |7 - 11|}{36} =$$

$$\frac{30 - 5 - 4 - 2 - 0 - 4}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

گزینه ۱

۱۴۸- در معادله  $ax^2 + bx = 5$ ، ضریب  $a$  به تصادف عددی در بازه  $[1, 3]$  و ضریب  $b$  به طور تصادفی عددی در بازه  $[-3, 0]$  انتخاب شده است. با کدام احتمال،

مجموع جواب‌های این معادله بیشتر از  $\frac{1}{3}$  است؟

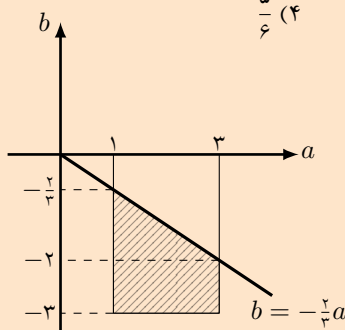
۱ (۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{7}{12}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

مجموع جواب‌های معادله درجه دو، از رابطه  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  بدست می‌آید، بنابراین:

$$-\frac{b}{a} > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} < -\frac{2}{3} \xrightarrow{\times a (a > 0)} b < -\frac{2}{3}a$$

$$\Rightarrow P = \frac{S_{\text{دورتر}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \frac{7}{3}) \times 2}{2 \times 3} = \frac{\frac{10}{3}}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

گزینه ۲



۱۴۹- درجه رأس‌های گراف ساده و همبند اعداد  $a, b, c, 1, 3, 4$  هستند. اگر  $p$  تعداد رأس‌های گراف و  $q$  تعداد یال‌های گراف و  $q = \frac{3}{4}p$  باشد، تعداد جواب‌های مجموعه  $\{a, b, c\}$  کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

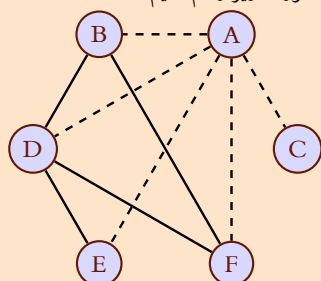
این گراف ۶ رأس دارد، یعنی  $p = 6$  پس:

$$q = \frac{3}{4}p \Rightarrow 2q = 3p = 18 \Rightarrow q = 9$$

بنابراین ۹ یال داریم. از آنجا که  $p = 6$ ، پس بیشترین درجه ممکن،  $\Delta = 5$  خواهد بود. اگر  $\Delta = 5$ ، از یکی از رأس‌ها (که حتماً یکی از سه رأس با درجه  $a$  یا  $b$  است، فرض می‌کنیم  $c$  باشد) به همه رأس‌های دیگر یالی وجود دارد. پس شرط هم‌بند بودن وجود دارد، اکنون اگر این رأس را با یال‌های متصل به آن کنار بگذاریم، گراف جدیدی با ۵ رأس و ۴ یال داریم که درجه رأس‌های آن باید به صورت زیر باشد:

$$3, 2, 0, 0, a - 1, b - 1$$

بنابراین گراف جدید باید یک رأس منفرد (ایزوله)، یک رأس با درجه ۲ و یک رأس با درجه ۳ داشته باشد، می‌توانیم این گراف را به صورت زیر رسم کنیم



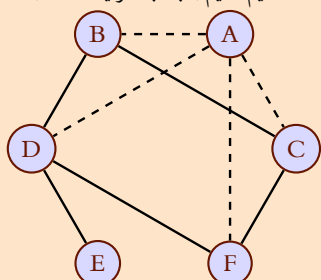
$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=2 \Rightarrow a=3 \\ b-1=1 \Rightarrow b=2 \end{cases} \Rightarrow \{a, b, c\} = \{3, 2, 5\}$$

درجات رئوس گراف جدید: ۳، ۲، ۲، ۱، ۰

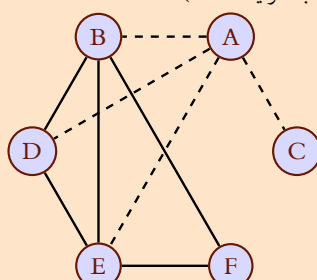
اگر بیشترین درجه  $\Delta = 4$  باشد، در این صورت یک رأس وجود دارد که از آن رأس به ۴ رأس دیگر، یک یال وجود دارد. رأس باقیمانده هم حتماً باید به یکی از آن ۴ رأس متصل باشد، زیرا گراف همبند است. (و البته روشن است که به رأس اول نمی‌تواند متصل شود، زیرا درجه آن ۵ می‌شود، و بیشترین درجه ۵ خواهد شد). حال اگر این رأس ۴ یالی را با یال‌های متصل به آن کنار بگذاریم، ۵ رأس با پنج باقی می‌ماند، دو حالت داریم:

الف- رأس با درجه ۱، یکی از آن ۴ رأس است (مثلاً C) که در این صورت یا حذف آن رأس ۴ یالی، این رأس ایزوله می‌شود و باید ۵ یال جدید را بین ۴ رأس دیگر B و D و E و F تقسیم کنیم (البته با شرایط مسئله)

ب- رأس با درجه ۱، هیچ یک از آن ۴ رأس نیست (یعنی E است) که در این صورت چون بین این رأس و یکی از رأس‌های دیگر حتماً یک یال داریم، پس باید ۴ یال جدید را بین ۴ رأس D و B و C و F تقسیم کنیم (البته با شرایط مسئله)



$$4, 4, 3, 3, 3, 1 \Rightarrow \{a, b, c\} = \{4, 3, 3\}$$



$$4, 4, 4, 3, 2, 1 \Rightarrow \{a, b, c\} = \{4, 4, 2\}$$

گزینه ۳

۱۵۰- هفت برابر عدد شش‌رقمی  $\overline{abcabc}$ ، مربع کامل است. بیشترین مقدار مجموع ارقام عدد  $\overline{abc}$  کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

$$x = 7 \times \overline{abcabc} = 7 \times (\overline{abc} + 1000 \times \overline{abc}) = 7 \times 1001 \times \overline{abc} = 7 \times 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc} = 7^2 \times 11 \times 13 \times \overline{abc} = k^2$$

$$\overline{abc} = 11 \times 13 \times q^2 = 143q^2$$

$$\Rightarrow \overline{abc} \text{ عدد سه رقمی شدن } \Rightarrow \begin{cases} q^2 = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 143 \Rightarrow a+b+c = 8 \\ q^2 = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 143 \times 4 = 572 \Rightarrow a+b+c = 14 \end{cases}$$

گزینه ۱

۱۵۱- دو برابر عدد طبیعی  $N = \overline{abc}$  با تغییر مبنا به صورت  $(a \circ b \circ c)$  نوشته شده است. بیشترین مقدار  $N$ ، از مربع کامل، حداکثر چند واحد کمتر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  رقم عدد در مبنای ۶ هستند، پس باید از ۶ کوچکتر باشد. البته باید  $a \neq 0$  زیرا رقم اول است.

$$2 \times \overline{abc} = (a \circ b \circ c)_6 \Rightarrow 2 \times (c + 10b + 100a) = c + 6b + 6^2 \times 0 + 6^2 \times a \Rightarrow 2c + 20b + 200a = c + 6b + 216a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 16a - 14b \Rightarrow c = 2(8a - 7b) \Rightarrow \begin{cases} c = 2 = 2 \times (8 \times 1 - 7 \times 1) \\ c = 4 = 2 \times (8 \times 2 - 7 \times 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = 1, c = 2 \\ a = 2, b = 2, c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = 224 \Rightarrow \text{نزدیک ترین مربع کامل، ۲۲۵ است که از } N, 1 \text{ واحد بیشتر است.}$$

گزینه ۱

۱۵۲- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، دو عدد به صورت‌های  $5n-2$  و  $7n+3$ ، نسبت به هم غیر اول‌اند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

اگر ب.م.م دو عدد را  $d$  فرض کنیم:

$$\begin{cases} d | (5n-2) \\ d | (7n+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | 7 \times (5n-2) \\ d | 5 \times (7n+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | (35n-14) \\ d | (35n+15) \end{cases} \Rightarrow d | (35n+15) - (35n-14) = 29 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 29 \end{cases} \Rightarrow d = 29$$

$$\begin{cases} 29 | (5n-2) \\ 29 | (7n+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29 | 3 \times (5n-2) = 15n-6 \\ 29 | 2 \times (7n+3) = 14n+6 \end{cases} \Rightarrow 29 | (n-12) \Rightarrow n-12 = 29k \Rightarrow n = 29k + 12 = 12, 41, 70, 99$$

گزینه ۲



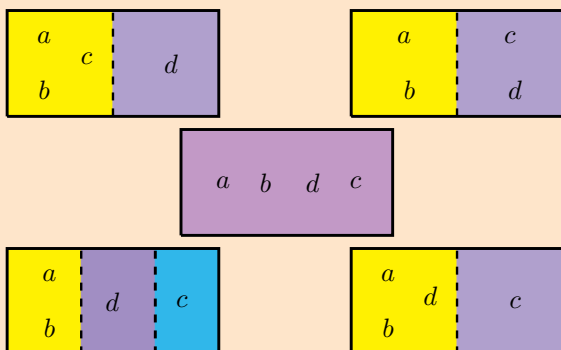
۱۵۳ - تعداد رابطه‌های هم‌ارزی، روی مجموعه  $\{a, b, c, d\}$  که شامل  $(a, b)$  باشد، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



### یادآوری

وقتی در رابطه هم‌ارزی، دو عضو مجموعه با هم رابطه دارند، یعنی این دو عضو در یک کلاس هم‌ارزی هستند و این بدان معنا است که در افراز مجموعه، این دو عضو، در یک مجموعه می‌باشند.

پس در واقع باید تعداد افزایشی را پیدا کنیم که در آن  $a$  و  $b$  در یک مجموعه باشند.

گزینه ۳

۱۵۴ - تعداد سه تایی‌های مرتب، با مختص‌های صحیح و غیر منفی، به طوری که مجموع هر سه مختص برابر ۱۰ و هر مختص کمتر از ۶ باشد کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

باید تعداد جواب‌های معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 10$  را به طوری که  $x_i < 6$  باشد بدست آوریم. اگر  $A_1$  مجموعه جواب‌هایی باشد که  $x_1 \geq 6$  در این صورت:

$$y_1 = x_1 - 6, y_1 \geq 0 \Rightarrow y_1 + 6 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 4, \text{ جواب‌های صحیح نامنفی: } \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

متشابه‌ها برای  $x_2$  و  $x_3$  همین فرآیند را داریم، پس  $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 15$  زیرا امکان ندارد هم‌زمان دو تا از  $x_i$  ها بزرگتر یا مساوی ۶ باشد.

$$\begin{aligned} & \left( |A_1| + |A_2| + |A_3| - \underbrace{|A_1 \cap A_2|} - \underbrace{|A_2 \cap A_3|} - \underbrace{|A_1 \cap A_3|} + \underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|} \right) \\ &= \binom{10+3-1}{3-1} - (15 + 15 + 15) = \binom{12}{2} - (45) = 66 - 45 = 21 \end{aligned}$$

گزینه ۲

۱۵۵ - در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج‌شده، هم‌رنگ هستند؟

۰/۲۴ (۴)

۰/۱۸ (۳)

۰/۱۵ (۲)

۰/۱۲ (۱)

یا دو مهره انتخابی از ظرف اول و دو مهره انتخابی از ظرف دوم سفید، و یا دو مهره انتخابی از ظرف اول و دو مهره انتخابی از ظرف دوم سیاه هستند.

$$P_{\text{هر دو ظرف هم‌رنگ}} = P_{\text{هر دو ظرف سفید}} + P_{\text{هر دو ظرف سیاه}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{10 \times 6}{28 \times 15} + \frac{3 \times 1}{28 \times 15} = \frac{63}{28 \times 15} = \frac{3}{20} = 0/15$$

گزینه ۲

## پایند و پیروز باشید!

ابوالفضل معدنی پور  
تلفن تماس: ۰۹۳۵۶۰۶۱۷۴۵

Email:

[abolfazl.madanipour@gmail.com](mailto:abolfazl.madanipour@gmail.com)