سمینار ۱

تجزیهٔ غیریکتا در دامنه‌های صحیح

درجهٔ tame و catenery

سمینار هفتگی ریاضی - تاریخ:۱۶ دی ۱۳۸۷

مهدی امیدعلی

گروه ریاضی

دانشگاه شریف

چشم‌انداز

چکیده

مطالعهٔ ویژگی‌های ترکیبیاتی خاصی از تجزیه‌های غیریکتا موضوع اصلی دسته‌ای از تحقیقات کنونی است. دانسته‌های حال حاضر در مورد دو ناوردای ترکیبیاتی، درجهٔ catenary و tame، حتی در حالت مونوئیدهای عددی بسیار کم است. در این گزارش تحقیقاتی کارهای انجام شدهٔ بر روی این دو ناوردا برای مونوئیدهای عددی تولید شده توسط مجموعه‌های تصاعدی تعمیم‌یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا به محاسبهٔ این دو ناوردا در این حالت می‌پردازیم و با بررسی مقادیر بدست آمده خواهیم دید که تفاضل این دو ناوردا می‌تواند به اندازهٔ دلخواه بزرگ باشد حتی اگر کاردینال مجموعهٔ مولد مینیمال پایا باقی بماند.

مقدمه

چندین ناوردای عددی وجود دارد که رفتار تجزیه‌های غیریکتا را در یک دامنهٔ صحیح مشخص می‌کنند. کارهای اولیهٔ انجام شده در این راستا بر مطالعهٔ طول تجزیه‌های مختلف برحسب عناصر تحویل‌ناپذیر متمرکز بود. مجموعه‌های دلتا و انعطاف (elasticity) دو نمونه از این ناورداها بودند که نشان می‌دادند یک دامنهٔ صحیح چقدر از دامنهٔ تجزیهٔ یکتا یا نیمه‌یکتا (یعنی دامنه‌هایی که طول تجزیه‌های مختلف هر عنصر به عناصر تحویل‌ناپذیر یکسان باشند) دور هستند. در سال‌های اخیر ناورداهای دیگری در مقالات پدیدار شده‌اند. درجهٔ catenary و درجهٔ tame دو نمونه از این ناورداها هستند.

مونوئیدهای عددی

منظور از یک مونوئید عددی S عبارت است از یک زیرمونوئید از $(\mathbb{N}_0, +)$، که $0 \in S$ و $\mathbb{N} \setminus S$ متناهی باشد.

- هر مونوئید عددی دارای یک مجموعهٔ مولد مینیمال یکتا است.
- $\max(\mathbb{N}_0 \setminus S)$ را عدد فرابنیوس S می‌نامند و با $g(S)$ نمایش می‌دهیم.
- اگر $0 < n_0 < \ldots < n_p$ اعداد صحیح مثبت باشند و $\gcd\{n_i\} = 1$ آنگاه مونوئید عددی تولید شده توسط این اعداد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle n_0, \ldots, n_p \rangle = \mathbb{N}_0 n_0 + \ldots + \mathbb{N}_0 n_p = \left\{ \sum z_i n_i \middle| z_i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- بر روی S یک ترتیب جزئی $\leq_S$ به این صورت تعریف می‌شود که $a \leq_S b$ اگر و تنها اگر $b - a \in S$.

- تابع تجزیه S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\varphi : \mathbb{N}_0^{p+1} \to S$

$$\varphi(z_0, \ldots, z_p) = z_0 n_0 + \ldots + z_p n_p.$$

- مجموعهٔ تجزیه‌های $n \in S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathsf{Z}(n) = \varphi^{-1}(n) = \{(z_0, \ldots, z_p) \in \mathbb{N}^{p+1} | z_0 n_0 + \ldots + z_p n_p = n\}.$$

- طول یک تجزیهٔ $z = (z_0, \ldots, z_p) \in \mathsf{Z}(n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|z| = z_0 + \ldots + z_p.$$

- مجموعهٔ طول‌های $n \in S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathsf{L}(n) = \{|z| \mid z \in \mathsf{Z}(n)\} \subset \mathbb{N}_0.$$

- اگر $z = (z, \ldots, z_p), z' = (z', \ldots, z'_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ تعریف می‌کنیم:

$$\gcd(z, z') = (\min\{z_1, z'_1\}, \ldots, \min\{z_p, z'_p\}), \frac{z}{z'} = z - z'$$

- اگر $z=(z,\ldots,z_p), z'=(z',\ldots,z'_p)\in\mathbb{N}_0^{p+1}$ تعریف می‌کنیم:

$$\gcd(z,z')=(\min\{z_1,z'_1\},\ldots,\min\{z_p,z'_p\}),\ \frac{z}{z'}=z-z'$$

و فاصلهٔ بین z و z' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{d}(z,z')=\max\left\{\left|\frac{z}{\gcd(z,z')}\right|,\left|\frac{z'}{\gcd(z,z')}\right|\right\}$$

- فاصلهٔ دو زیرمجموعهٔ X و Y از $\mathbb{N}_0^{p+1}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{d}(X,Y)=\min\{\mathrm{d}(x,y)|x\in X, y\in Y\}$$

درجهٔ catenary

- فرض کنید $n \in S$ و $z, z' \in \mathsf{Z}(n)$. منظور از یک N-زنجیر تجزیه‌ها از z تا z' عبارت است از دنبالهٔ $z_0, \ldots, z_k \in \mathsf{Z}(n)$ به طوری که $z = z_0$، $z' = z_k$ و $\mathrm{d}(z_i, z_{i+1}) \leq N$ بر ای هر i.
- درجهٔ catenary عنصر $n \in S$، $\mathrm{c}(n)$ را کوچکترین عدد صحیح نامنفی N تعریف می‌کنیم که هر دو تجزیهٔ z و z' از n را بتوان با یک N-زنجیر تجزیه‌ها به هم وصل کرد.
- درجهٔ catenary مونوئید S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{c}(S) = \sup\{\mathrm{c}(n) | n \in S\}.$$

درجهٔ tame

- فرض کنید $n \in S$. برای $i \in \{0, \dots, p\}$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathsf{Z}^i(n) = \{(z_1, \dots, z_p) \in \mathsf{Z}(n) | z_i \neq 0\}$$

- فرض کنید $n - n_i \in S$؛ تعریف می‌کنیم

$$\mathsf{t}_i(n) = \max\{\mathrm{d}(z, \mathsf{Z}^i(n)) | z \in \mathsf{Z}(n)\}$$

و

$$\mathsf{t}(n) = \max\{\mathsf{t}_i(n) | n - n_i \in S, 1 \leq i \leq p\}$$

و آنرا درجهٔ tame عنصر n می‌نامیم.

- درجهٔ tame مونوئید S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathsf{t}(S) = \max\{\mathsf{t}(n) | n \in S\}$$

معرفی مونوئیدهای تولید شده توسط دنباله‌های تصاعدی تعمیم‌یافته

- دنبالهٔ $a, ha+d, \dots, ha+xd$ را که در آن a، h، x، و d اعداد صحیح مثبت باشند و $\gcd(a,d)=1$ یک دنبالهٔ تصاعدی تعمیم‌یافته می‌نامیم.
- اگر $n = qa + id$ و $0 \le i < a$، آنگاه $n \in S$ اگر و تنها اگر

$$\lceil \frac{i}{x} \rceil h \le q$$

- اگر $n = qa + id$ و $0 \le i < a$، آنگاه

$$\max \mathrm{L}(n) = q - \lceil \frac{i}{x} \rceil (h-1)$$

درجهٔ catenary و tame

- فرض کنید $S = \langle a, ha+d, \dots, ha+xd \rangle$ که a, d, h، و x اعداد صحیح مثبت هستند، $\gcd(a,d)=1$، و $1 \le x \le a-1$. آنگاه
- $$c(S) = \lceil \frac{a}{x} \rceil h + d$$
- $$t(S) = \omega(S) = \left(\lceil \frac{a-1}{x} \rceil + 1\right) h + d$$

نتایج

- عدد فرابنیوس مونوئیدهای عددی تولید شده توسط دنباله‌های تصاعدی تعمیم یافته به صورت زیر پیدا شده است:

$$g(S) = \lceil \frac{a-1}{x} \rceil ha + ad - a - d$$

فرض کنید

$$B = \frac{g(S) + n_p}{n_1} + 1 = (\lceil \frac{a-1}{x} \rceil + 1)h + \frac{x-1}{a} d.$$

آنگاه

$$B - \mathrm{t}(S) = \frac{x-1}{a} d$$

و

$$B - \mathrm{c}(S) = (\lceil \frac{a-1}{x} \rceil + 1 - \lceil \frac{a}{x} \rceil) h + \frac{x-1}{a} d$$

نتایج

- فرض کنید $(a \mod x) = 1$. آنگاه $\mathrm{c}(S) = \mathrm{t}(S)$ در حالی که $B - \mathrm{c}(S) = (x-1)d/a$ می‌تواند به اندازهٔ کافی بزرگ باشد وقتی که d به بینهایت میل می‌کند.
- فرض کنید $(a \mod x) \neq 1$ و d را طوری انتخاب کنید که $(x-1)d < a$. آنگاه $\lfloor B \rfloor = \mathrm{t}(S)$ در حالی که $B - \mathrm{c}(S) = h + (x-1)d/a$ می‌تواند به اندازهٔ کافی بزرگ باشد وقتی که h به بینهایت میل کند.