نظریه تقریب

از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها

اُل کریستیانسن

خدیجه کریستیانسن

ترجمه

دکتر غلامرضا حجتی

دکتر حسین خیری

دکتر اصغر رحیمی

دکتر صداقت شهمراد

کریستیانسن، ال، ۱۹۶۶-م. Christensen, Ole
نظریه تقریب، از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها / ال کریستیانسن، خدیجه کریستیانسن؛ ترجمه غلامرضا حجتی ... [و دیگران]- مراغه: دانشگاه مراغه، ۱۳۸۹.
خ، ۱۸۵ ص. : مصور، نمودار.- (انتشارات دانشگاه مراغه)
ISBN 978-600-91571-1-2
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی:
APPROXIMATION THEORY
FROM TAYLOR POLYNOMIALS TO WAVELETS, 2004.
نظریه تقریب، کریستیانسن، خدیجه لاگریدا، ۱۹۶۳-م.
Christensen, Khadija L. (Khadija Laghrida)
حجتی،غلامرضا،۱۳۵۲-، مترجم.
واژه‌نامه.
چاپ اول: ۱۳۸۹.
QA۲۲۱/ک۴ن۶ ۵۱۱/۴
کتابخانه ملی ایران ۱۹۹۲۶۲۹

نام کتاب	نظریه تقریب، از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها
مولف	ال کریستیانسن، خدیجه کریستیانسن
مترجم	دکتر غلامرضا حجتی، دکتر حسین خیری، دکتر اصغر رحیمی، دکتر صداقت شهمراد
طراح جلد و صفحه‌آرا	وحید دامن‌افشان
ناشر	انتشارات دانشگاه مراغه، مراغه
نوبت چاپ	اول ۱۳۸۹
شمارگان	۱۵۰۰ جلد
قطع	وزیری
قیمت	۴۰۰۰ تومان

پیشگفتار مترجمین

امروزه پیشرفت علوم کامپیوتر و به تبع آن پیشرفت‌های ریاضیات کاربردی موجب گردیده گرایش به مباحث علمی تقریب، از قبیل نظریه تقریب و محاسبات تقریبی به دلیل کاربردهای فراوان آنها در رشته‌های علوم پایه و مهندسی، گسترش یابد. متاسفانه منبع درسی مناسبی به زبان فارسی، که بتواند علاقمندان را با مفاهیم و اصول نظریه تقریب آشنا کند، در دسترس نیست. مترجمین کتاب حاضر از چند سال پیش بر آن بودند تا کتابی در این زمینه به همراه مفاهیم جدید نظریه تقریب، بویژه نظریه موجک‌ها، به دانشجویان علوم پایه و مهندسی ارائه نمایند؛ تا اینکه با انجام جستجوهایی با کتابی آشنا شدیم که مناسب نظر ما بود؛ یعنی کتابی با عنوان «نظریه تقریب، از چند جمله‌ای‌های تیلور تا موجک‌ها».

این کتاب شامل موضوعات نظریه تقریب از قدیمی‌ترین مطالب آن، شامل چندجمله‌ای‌های تیلور و قضیه وایرشتراس، تا جدیدترین آنها، شامل نظریه موجک و نظریه قاب‌ها می‌باشد.

امید است ترجمه این کتاب بتواند خوانندگان علاقمند را به سوی پیشرفت در یکی از زیباترین شاخه‌های ریاضیات، یعنی نظریه تقریب و کاربردهای آن، رهنمون سازد.

مترجمین این کتاب متواضعانه پذیرای انتقادها و پیشنهادهای همه اساتید و دانشجویان در این ترجمه هستند. در پایان لازم می‌دانیم از آقای وحید دامن‌افشان، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه تبریز، به خاطر آماده‌سازی کتاب با استفاده از نرم‌افزار XePersian، تشکر کنیم. همچنین از انتشارات دانشگاه مراغه که مقدمات چاپ این کتاب را فراهم آوردند، صمیمانه قدردانی می‌کنیم.

دکتر اصغر رحیمی
دانشکده علوم پایه – دانشگاه مراغه
دکتر غلامرضا حجتی، دکتر حسین خیری، دکتر صداقت شهمراد
دانشکده علوم ریاضی – دانشگاه تبریز
بهمن ماه ۱۳۸۸

مقدمه

این کتاب معرفی مقدماتی بر مبحث کلاسیک **نظریه تقریب** در ریاضیات بوده چنانچه به مبحث جدید موجک‌ها منجر می‌شود. هدف رفتاری در این کتاب بر مبنای تقریب «عبارات پیچیده» با «عبارات ساده‌تر» است که نقش اساسی در بسیاری از زمینه‌های ریاضیات مدرن و کاربردهای آن دارد. یکی از اهداف اصلی ارائه این کتاب، تفهیم این موضوع به خواننده است که ریاضیات موضوعی با سیر تکاملی پیوسته است. تفهیم این واقعیّت برای دانشجویان سال دوّم دانشگاه معمولاً مشکل است.

اغلب، معلّمان ابزار اوّلیهٔ کافی برای ایجاد انگیزه و تشویق دانشجویان برای مطالعات بعدی ندارند. کتاب حاضر کاربردی در این مضمون دارد زیرا به بیان طبیعت دینامیکی ریاضیات و چگونگی تأثیر نظم کلاسیک موضوعات ریاضیّات و کاربردهای آن می‌پردازد. این کتاب ممکن است با معرّفی نظریات ارائه شده در چندین کتاب با متن ساده، خواننده را به سمت ادبیات پیشرفته‌تر، همانند دیگر آثار «آنالیز عددی کاربردی و هارمونیک» هدایت کند.

در اینجا توجّه ما بیشتر روی جزئیات فنّی بوده و کتاب اصولاً یک کتاب سطح متوسط نیست. امّا می‌توان آن را بعنوان متن درسی سری‌های نامتناهی و سری فوریه بکار برد که در آنها ایده‌ها و انگیزه‌ها مهمّتر از اثبات می‌باشد. در این دروس، طبیعی است که‌از دو فصل مربوط به موجک بعنوان مسیری جهت رسیدن به تحقیقات اخیر و بعنوان زمینه‌ای برای مطالعات بیشتر استفاده کرد. هدف از این دو فصل، معرّفی موجک‌ها بعنوان تعمیم از ساختار فصل‌های قبلی است. در اینجا بررسی کامل مدّ نظر نبوده و به همین دلیل تعداد تمرینهای کمتری در فصل مربوط به موجک نسبت به تعداد تمرینهای در سه فصل اوّل آمده است.

فصل اول در خصوص تقریب با چندجمله‌ای‌ها، بسیار مقدماتی بوده و حتی برای دانش‌آموزان دبیرستان قابل فهم است (البته اثبات‌ها ممکن است نیاز به پیش زمینه بیشتری از ریاضیات داشته باشند). به علاوه، این فصل مقدماتی در خصوص بقیه مطالب کتاب ایده کلی به خواننده می‌دهد.

فصل بعدی، در مورد سری‌های نامتناهی، با تاکید زیاد روی مفاهیم نظریه تقریب از بحث مقدماتی فاصله می‌گیرد. همچنین، این فصل با تکمیل نواقص دروس مقدماتی دانشگاهی به موضوع جدید می‌پردازد که شامل چندین مثال و ساختار (کلاسیک) سرگرم کننده است که به ندرت در کلاس‌های درس به آن اشاره می‌شود.

آنالیز موجک را می‌توان به عنوان مکمل جدیدی از آنالیز سری فوریه کلاسیک در نظر گرفت

و به این دلیل معرفی کاملی از سری فوریه را در فصل سوم آورده‌ایم. در این فصل روی مفاهیمی تمرکز می‌کنیم که در نظریه موجک نیز مطرح می‌گردد به عنوان مثال، خواص تقریب و تاثیر خواص یک تابع روی ضرائب بسط آن بحث می‌گردد.

فصل‌های ۴ و ۵ موجک‌ها و خواص آنها را بررسی می‌کند. فصل ۴ بیشتر به تشریح موجک می‌پردازد تا نمادهای آن، اما به خواننده درکی از سوالات و مفاهیم می‌دهد. این فصل همچنین در خصوص داستان پیدایش موجک و کاربردهای آن در زمینه سیگنال صحبت می‌کند. فصل ۵ قدری تکنیکی‌تر است، اما با استفاده از اطلاعات فصل‌های قبلی قابل فهم می‌باشد. بخش اصلی این فصل بخش ۴.۵ است که نمایش چند منظوره متناظر با موجک‌های خاص از دسته موجک‌ها را تشریح می‌کند. در نهایت، پیوست الف شامل اثبات برخی نتایج انتخاب شده و پیوست ب شامل برخی سری‌های مهم توانی و فوریه است.

لیست مراجع شامل کتاب‌ها و مقالات در چند سطح آمده است. جهت مثمرثمر بودن، ساختار ترتیبی زیر را در نظر گرفته‌ایم:

(A) مقدماتی؛ (B) در سطح دانشجویان کارشناسی؛ (C) در سطح فارغ‌التحصیلان؛ (D) مقاله تحقیقی؛ (H) مقاله تاریخی.

ترتیب متناظر با مطالب کتاب نیز بصورت زیر است:

(A): فصل ۱؛

(A-B): فصل ۲، فصل ۴، پیوست؛

(B): فصل ۳، فصل ۵.

مطالب سری‌های نامتناهی برگرفته شده از یادداشت‌های مورد استفاده در دانشگاه فنی دانمارک است. در نسخه اصلی آن، این مفاهیم توسط اچ. جانسون نوشته شده است. در ویرایش‌های بعدی آن چندین پروفسور حضور داشته‌اند. برخی از مثال‌های ما از این یادداشت‌ها برداشته شده است.

از ریاضیدانانی که در نگارش این کتاب ما را همراهی کرده‌اند، تشکر می‌کنیم: پ. آلشولم و ا. جرسب به خاطر مطالعه دست نوشته‌ها و رفع ایرادات آن؛ پ. هانسون و ت. جانسون به خاطر کمک در تهیه نمودارها؛ پ. جرجنسون و ج. لموینگ به خاطر پیشنهادات مفیدشان؛ ا. کهن و م. ویکرهاوسر به خاطر تهیه شکل‌های خاص. همچنین از ج. بندت، ویراستار نشریه ANHA، به خاطر پیشنهاد تألیف این کتاب و ح. فیشینگر به خاطر تهیه لوازم اداری در طی مدت طولانی اقامت ما در وین سپاسگزاری می‌کنیم. در پایان از کادر بیرهاوسر، بویژه ت. گراسو برای کمک‌های ویراستاری مؤثرش و ا. لاو که در رفع مشکلات لاتکس ما را همراهی کرد، تشکر می‌کنیم. نویسنده اول کتاب از حمایت برنامه WAVE تحت پوشش سازمان علوم دانمارک سپاسگزاری می‌نماید.

اُل کریستیانسن
خدیجه کریستیانسن
لونگ بی، دانمارک
ژانویه ۲۰۰۴

فهرست مطالب

۱
تقریب با چند جمله‌ای‌ها

در بسیاری از کاربردهای ریاضیات با توابعی مواجه می‌شویم که بسیار پیچیده‌تر از توابع استاندارد آنالیز کلاسیک هستند. برخی از این توابع را نمی‌توان به وسیله توابع استاندارد به شکل بسته بیان نمود، و بعضی از آنها به طور ضمنی و یا از طریق نمودارشان شناخته می‌شوند. برای مثال یک مدار الکتریکی را در نظر بگیرید که در آن شدت جریان را در نقطهٔ معینی به عنوان تابعی از زمان، اندازه می‌گیریم. خروجی ممکن است کاملاً پیچیده باشد و از طریق یک نمودار بهتر از سایر طرق توصیف شود.

مهندسی که در حال اندازه‌گیری شدت جریان در یک مدار الکتریکی است در مورد یک **سیگنال** صحبت می‌کند؛ در حالیکه برای یک ریاضیدان، این فقط بدین معنی است که حاصل خروجی، تابعی مانند $f(x)$ است که جریان را بر حسب زمان x می‌دهد. تعریف دقیقی از سیگنال ارائه نمی‌کنیم. برای اهداف ما کافی است سیگنال به عنوان بروز یک رخداد فیزیکی بر حسب یک تابع، یا بر حسب دنباله‌ای از اعداد باشد که در فصل ۵ بحث می‌شود.

سیگنال‌ها معمولاً به طور صریح بر حسب یک تابع داده نمی‌شوند؛ به عنوان مثال آنها از طریق اندازه‌گیری حاصل می‌شوند. این موجب می‌گردد که تعیین اطلاعات دقیق در مورد سیگنال‌ها از روی تابع f که آن را توصیف می‌کند، دشوار و یا غیرممکن باشد، بخصوص اگر مجبور به انجام برخی محاسبات روی f باشیم. در چنین مواردی مهم است که f رابتوانیم با توابع ساده‌تری تقریب بزنیم؛ یعنی مایل باشیم تابعی مانند g را طوری بیابیم که داشته باشیم:

- محاسبات مربوطه را بتوان روی تابع g انجام داد
- تابع g نزدیک به تابع f باشد، بطوریکه خروجی‌های حاصل از g اطلاعات مفیدی از سیگنال توصیف شده توسط f را بدهد

در این فصل روی تقریب با چند جمله‌ای‌ها تمرکز می‌کنیم. در ساده‌ترین حالت، این ایده از قبل در تعیین خط مماس برای یک تابع مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند x_0 ظاهر می‌شود. در حقیقت

خط مماس در یک نقطه مانند $x_\circ$ ساده‌ترین چند جمله‌ای از درجه ۱ است، که معمولاً تابع f را در نزدیکی $x_\circ$ به خوبی تقریب می‌کند.

نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان تقریب‌های بهتری با استفاده از چند جمله‌ای‌های از درجه بالاتر به دست آورد. با یک مقدمه عمومی در بخش ۱.۱ شروع می‌کنیم. سپس با تقریب، به وسیله چند جمله‌ای‌ها در بخش ۲.۱ پیش می‌رویم بطوریکه بیشتر این بخش به قضیه وایرشتراس اختصاص یافته است، این قضیه بیان می‌دارد که هر تابع پیوسته روی یک بازه بسته و کراندار را می‌توان با دقت دلخواه با چندجمله‌ای‌ها تقریب نمود. در بخش ۳.۱ یک بیان عینی‌تر با قضیه تیلور بدست می‌آوریم که تحت شرایط خاص بیان می‌دارد که چطور می‌توان یک چند جمله‌ای را جهت تقریب یک تابع داده شده، انتخاب نمود.

۱.۱ تقریب یک تابع روی یک بازه

نقطه شروع این بخش باید تعریف دقیقی از مفهوم تقریب یک تابع با تابع دیگر باشد. چنانکه بزودی خواهیم دید در واقع راههای متعددی برای این تعریف وجود دارد، و تعریف دقیق به وضعیتی که در آن هستیم، بستگی دارد. اجازه دهید یک مثال عینی ارائه دهیم که در آن نظریه تقریب لازم است.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنید می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم.

$$\int_\circ^۱ e^{-x^۲}dx \tag{۱.۱}$$

مشخص است که فرمولی برای انتگرال (۱.۱) بر حسب توابع مقدماتی وجود ندارد؛ یعنی نمی‌توانیم (۱.۱) را به سادگی با انتگرالگیری از تابع $e^{-x^۲}$ و سپس وارد کردن حدود $x=\circ$ و $x=۱$ بیابیم. بنابراین مجبور هستیم راه دیگری را برای تخمین (۱.۱) پیدا کنیم. این نقطه‌ای است که نظریه تقریب نمایان می‌شود. در این مورد عینی، با توجه به مطالب اشاره شده در صفحه قبل تابع g را طوری پیدا می‌کنیم که:

- انتگرال $\int_\circ^۱ g(x)dx$ قابل محاسبه باشد.
- $g(x)$ در بازه $x\in[\circ,۱]$ به تابع $e^{-x^۲}$ نزدیک باشد بطوریکه بتوانیم اختلاف $\int_\circ^۱ g(x)dx$ از $\int_\circ^۱ e^{-x^۲}dx$ را کنترل کنیم.

یک راه انجام این کار، یافتن تابعی مانند g است بطوریکه اولاً بتوان از آن انتگرال گرفت و در ضمن به ازای $\varepsilon>\circ$ای داشته باشیم

$$-\varepsilon \le e^{-x^۲}-g(x)\le \varepsilon$$

یا

$$-\varepsilon + g(x) \leq e^{-x^{2}} \leq \varepsilon + g(x)$$

و در نتیجه

$$-\varepsilon + \int_{0}^{1} g(x)dx \leq \int_{0}^{1} e^{-x^{2}}dx \leq \varepsilon + \int_{0}^{1} g(x)dx$$

بنابراین $\int_{0}^{1} g(x)dx$ یک مقدار تقریبی برای انتگرال (۱.۱) می‌باشد. بعد از تکمیل تئوری لازم در بخش ۳.۱، نحوه تعیین g را در مثال ۸.۳.۱ توضیح می‌دهیم.

بحث در مثال ۱.۱.۱ را می‌توان تعمیم داد. در حقیقت، این مباحث دقیقاً به مطلب زیر سوق داده می‌شود.

گزاره ۲.۱.۱ *فرض کنید $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه متناهی با طول L باشد. بعلاوه فرض کنید f و g توابع انتگرال پذیر روی I باشند، و فرض کنید به ازای $\varepsilon > 0$ای داشته باشیم*

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in I \tag{۲.۱}$$

در این صورت

$$-\varepsilon L + \int_{I} g(x)dx \leq \int_{I} e^{-x^{2}}dx \leq \varepsilon L + \int_{I} g(x)dx.$$

بنابراین اگر هدف ما تقریب انتگرال تابع پیچیده‌ای مانند f باشد، نامساوی (۲.۱) خاصیتی از تابع g را توصیف می‌کند که تخمین انتگرال f را ممکن می‌سازد (در صورتیکه انتگرال g قابل محاسبه باشد).

در این فصل، تقریب را به مفهوم (۲.۱) در نظر می‌گیریم؛ یعنی g را تقریب خوبی از f می‌گوییم در صورتیکه (۲.۱) با یک مقدار به قدر کافی کوچک از $\varepsilon > 0$ برآورده شود. معمولاً g با شرط ویژه (۲.۱) را **تقریب یکنواخت** f می‌نامند. این شرط، تعریف مناسبی از تقریب برای بسیاری از اهداف عملی است؛ با این حال مواردی وجود دارد که در آنها تقریب یکنواخت g از تابع f اطلاعات کافی را بدست نمی‌دهد. برای مثال شرط (۲.۱) هیچ گونه اطلاعاتی را در مورد اختلاف مشتقات f' و g' نمی‌دهد.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید $f(x) = \cos(x)$ و به ازای $k \in \mathbb{N}$ توابع زیر را در نظر بگیرید

$$g_k(x) = \cos x + \frac{1}{k}\sin(k^{2}x).$$

در نتیجه

$$|f(x) - g_k(x)| \leq \frac{1}{k}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

یعنی با انتخاب k به اندازه کافی بزرگ می‌توان f را به دلخواه خوب تقریب نمود. از طرف دیگر چون

$$f'(x) = -\sin(x), \qquad g'_k(x) = -\sin(x) + k\cos(k^۲x)$$

لذا داریم

$$|f'(x) - g'_k(x)| = k\cos(k^۲x).$$

این ایجاب می‌کند که

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x) - g'_k(x)| = |f'(۰) - g'_k(۰)| = k.$$

بنابراین علی رغم اینکه دنباله g_k به طور یکنواخت به f همگراست، فاصله بین f' و g'_k در حال افزایش می‌باشد.

این مثال نشان می‌دهد که در صورتیکه هدف ما تقریب مشتق یک تابع باشد، تقریب یکنواخت مناسب نبوده و تعریف دیگری از تقریب نیاز است.

۲.۱ قضیه وایرشتراس

اکنون تقریب را به مفهوم (۲.۱) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که g یک چند جمله‌ای باشد. یعنی به ازای تابع f داده شده در بازه I، سئوالی که پیش می‌آید، این است که آیا می‌توان به ازای هر $\varepsilon > ۰$ چند جمله‌ای P را طوری یافت که

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in I.$$

که در آن، چند جمله‌ای P در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P(x) = a_Nx^N + a_{N-۱}x^{N-۱} + \cdots + a_۲x^۲ + a_۱x + a_۰ = \sum_{n=۰}^{N} a_nx^n,$$

که در آن $a_۰, \cdots, a_n$ اعداد ثابتی هستند؛ اگر $a_N \neq ۰$، چند جمله‌ای از درجه N نامیده می‌شود. در حالت کلی پاسخ به سئوال بالا ممکن است منفی باشد.

مثال ۱.۲.۱ تابع $f : (-۱, ۱) \to E$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{برای} \quad x \in (-۱, ۰) \\ ۰ & \text{برای} \quad x \in [۰, ۱). \end{cases}$$