نظریه اندازه و انتگرال گیری

تالیف: بئر

ترجمه به انگلیسی: روبرت

ترجمه به فارسی: دکتر

دکتر

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

فهرست مطالب

فصل اول

نظریه‌ی اندازه

در هندسه‌ی مقدماتی، به زیر مجموعه‌های ساده‌ی هندسی خط، صفحه، و فضای سه بعدی، «اندازه‌هایی عددی» به نام طول، مساحت و حجم اختصاص داده می‌شود. ابتدا آنچه به طور شهودی بدیهی است این است که طول یک پاره خط، مساحت یک مستطیل و حجم یک مکعب، چطور باید تعریف شود. با عبور از این مرحله، با استفاده از روش‌های هندسه‌ی مقدماتی، طول، مساحت، و حجم مجموعه‌های پیچیده‌تری را می‌توانیم مشخص کنیم در صورتی که قواعد محاسباتی مشخصی را برای کار با این اندازه‌های عددی بپذیریم.

بخش ۱ σ -جبرها و مولدهای آن

فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعه‌ی توانی آن، یعنی، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω را نشان دهد. در این صورت همراه با هر خانواده‌ی $(A_i)_{i\in I}$ از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{P}(\Omega)$، اجتماع $\cup_{i\in I}A_i$ و اشتراک $\cap_{i\in I}A_i$ نیز متعلق به $\mathcal{P}(\Omega)$ هستند. به علاوه $\mathcal{P}(\Omega)$ شامل مکمل $\complement A$ از هر مجموعه‌ی A در خودش است.
در ادامه به مطالعه‌ی زیرسامانه‌های $\mathcal{A}$ از $\mathcal{P}(\Omega)$ می‌پردازیم که خواصی مشابه با $\mathcal{P}(\Omega)$ ،حداقل برای مجموعه‌ی زیرنویس‌های شمارش پذیر I دارند؛ طبق قراردادهای ذکر شده در مقدمه، مجموعه‌های شمارش پذیر، مجموعه‌هایی هستند که متناهی یا شمارش پذیر نامتناهی‌اند.

تعریف ۱.۱. یک سامانه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، یک σ-جبر (در Ω) نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{۱.۱}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{A} \tag{۲.۱}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}\subset\mathcal{A}} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}}^{n} \in \mathcal{A} \tag{۳.۱}$$

مثال.۱. $\mathcal{P}(\Omega)$ همواره یک σ-جبر است.
۲. برای هر مجموعه‌ی Ω، سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های آن که شمارش‌پذیر یا هم‌شمارش‌پذیر هستند (یعنی، زیرمجموعه‌های A از Ω به طوری که A یا $\complement A$ شمارش‌پذیر باشد) یک σ-جبر تشکیل می‌دهد. ویژگی (۳.۱) به صورت زیر ثابت می‌شود. اگر هر A_n شمارش‌پذیر باشد، آن گاه اجتماع $\bigcup_{n\in ?N} A_n$ نیز همین طور است. اگر A_n وجود داشته باشد که شمارش‌پذیر نباشد، آن گاه مکمل آن شمارش‌پذیر است، و مجموعه‌ی $\complement C \bigcup_{n\in\mathbb{N}A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n$ نیز به عنوان زیرمجموعه‌ی $\complement A_n$ شمارش‌پذیر است.
۳. اگر $\mathcal{A}$ یک σ-جبر در یک مجموعه‌ی Ω و Ω' یک زیرمجموعه‌ی Ω باشد، آن‌گاه

$$\Omega' \cap \mathcal{A} := \{\Omega' \cap A : A \in \mathcal{A}\} \tag{۴.۱}$$

معروف به اثر $\mathcal{A}$ در Ω'، یک σ-جبر در Ω' است. در حالتی که $\Omega' \in \mathcal{A}$، نماد $\Omega' \cap \mathcal{A}$ به طور ساده، همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω' متعلق به $\mathcal{A}$ را نشان می‌دهد.
۴. فرض کنیم Ω و Ω' دو مجموعه، $\mathcal{A}'$ یک σ-جبر در Ω' و $T : \Omega \to \Omega'$ یک نگاشت باشد. در این صورت بنابر ویژگی‌های آشنای عمل‌های نظریه مجموعه‌ها، تحت تصویر وارون، سامانه‌ی متشکل از مجموعه‌های زیر یک σ-جبر است

$$T^{-۱}(\mathcal{A}) := \{T^{-۱}(A') : A' \in \mathcal{A}\}. \tag{۵.۱}$$

هر σ-جبر $\mathcal{A}$ دارای ویژگی‌های «دوگان» برای (۱.۱) و (۳.۱) است؛ یعنی،

$$\emptyset \in \mathcal{A}, \tag{۶.۱}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \;\;\Rightarrow\;\; \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \tag{۷.۱}$$

که این ویژگی‌ها از (۱.۱)-(۳.۱) و برابری‌های $\complement\Omega = \emptyset$ و $\cap A_n = \complement(\cup \complement A_n)$ به دست می‌آیند. به علاوه

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

و

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \Omega \cap \Omega \cap \ldots$$

بنابراین $\mathcal{A}$ شامل اجتماع و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های خودش نیز هست. همچنین از این مشاهدات و (۲.۱) داریم

$$A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A\backslash B = A \cap \complement B \in \mathcal{A}. \tag{۸.۱}$$

برای ساختن σ-جبرها، قضیه‌ی زیر از اهمیت خاصی برخوردار است.

قضیه ۲.۱. اشتراک $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ از هر خانواده‌ی $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ از σ-جبرها در یک مجموعه‌ی یکسان Ω، یک σ-جبر در Ω است.

اثبات این قضیه تنها یک بررسی ساده‌ی ویژگی‌های (۱.۱)-(۳.۱) می‌باشد. در نتیجه برای هر دستگاه ξ از زیرمجموعه‌های Ω کوچکترین σ-جبر $\sigma(\mathcal{E})$ شامل $\mathcal{E}$ وجود دارد؛ یعنی، $\sigma(\mathcal{E})$ یک σ-جبر در Ω با ویژگی‌های زیر است

(۱) $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$،

(۲) برای هر σ-جبر $\mathcal{A}$ در Ω با شرط $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ داریم $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

برای اثبات فرض کنیم Σ سامانه‌ی همه‌ی σ-جبرهای $\mathcal{A}$ در Ω با شرط $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ است؛ برای مثال، $\mathcal{P}(\Omega)$ یک عضو از Σ است. در این صورت $\sigma(\mathcal{E})$ اشتراک همه‌ی عناصر $\mathcal{A} \in \Sigma$ است که طبق ۲.۱، دارای همه ی ویژگی‌های مطلوب است.

$\sigma(\mathcal{E})$، σ-جبر تولیدشده به وسیله‌ی $\mathcal{E}$ (در Ω) و $\mathcal{E}$ مولد $\sigma(\mathcal{E})$ نامیده می‌شود. **مثال.** ۵. اگر $\mathcal{E}$ یک σ-جبر در Ω باشد، آن گاه $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E})$.

۶. اگر $\mathcal{E}$ تنها از یک زیرمجموعه‌ی A از Ω تشکیل شده باشد، آن گاه $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, \complement A, \Omega\}$.

۷. جبر مثال ۲ به وسیله‌ی سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی Ω تولید شده است.

سامانه‌های متعددی از مجموعه‌های دارای تنها برخی از خواص σ-جبرها، مکرراً به عنوان مولد درنظر گرفته می‌شوند. از نمونه‌های خاص جالب توجه، حلقه‌هایی از مجموعه‌ها هستند.

تعریف ۳.۱. یک سامانه $\mathcal{R}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω یک حلقه (در Ω) نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\emptyset \in \mathcal{R}; \tag{۹.۱}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A\backslash B \in \mathcal{R}; \tag{۱۰.۱}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{R}. \tag{۱۱.۱}$$

اگر، به علاوه

$$\Omega \in \mathcal{R} \tag{۱۲.۱}$$

آن گاه $\mathcal{R}$ یک جبر (در Ω) نامیده می‌شود.

یک حلقه، نه تنها اجتماع، بلکه اشتراک هر دو مجموعه‌ی خود (و لذا هر گردایه متناهی از مجموعه‌های خود) را نیز شامل می‌شود.

قضیه ۴.۱. یک سامانه $\mathcal{R}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω یک جبر است اگر و فقط اگر دارای ویژگی‌های (۱.۱)، (۲.۱) و (۱۱.۱) باشد.

اثبات. با توجه به تعریف، یک جبر دارای ویژگی‌های (۱.۱)، (۱۱.۱) و (۱۰.۱) است که از ویژگی آخر، (۲.۱) نتیجه می‌شود. گزاره‌ی عکس، از این واقعیت که $\complement\Omega = \emptyset$ همراه با برابری نظریه مجموعه‌ای

$$A\backslash B = A \cap \complement B = \complement(B \cap \complement A)$$

نتیجه می‌شود. □

مثال. ۸. هر σ-جبر یک جبر است.

۹. برای هر مجموعه‌ی Ω سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A از Ω که متناهی یا هم متناهی (یعنی، دارای مکمل متناهی در Ω) هستند یک جبر است، اما تنها وقتی یک σ-جبر است که Ω متناهی باشد.

۱۰. دستگاه همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی از یک مجموعه‌ی Ω یک حلقه است، اما تنها وقتی یک جبر است که Ω متناهی باشد.

۱۱. کوچکترین حلقه از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، مجموعه‌ی تهی $\emptyset$ است.

تمرین. ۱. برای هر دستگاه ξ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، کوچکترین حلقه‌ی $\mathcal{P}(\xi)$ در Ω وجود دارد که شامل ξ است. این حلقه، حلقه‌ی تولید شده به وسیله‌ی ξ نامیده می‌شود. این ادعای وجودی را ثابت کنید. در حالتی که ξ از دو زیرمجموعه‌ی A و B از Ω تشکیل شده است $\mathcal{P}(\xi)$ و $\sigma(\xi)$ را مشخص کنید؛ در این حالت چه وقتی برابری $\mathcal{P}(\xi) = \sigma(\xi)$ برقرار است؛ برای یک ξ دلخواه، چه وقتی این برابری برقرار است؟

۲. برای مجموعه‌های A و B، مجموعه‌ی زیر تفاضل متقارن آنها نامیده می‌شود

$$A\triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

ثابت کنید که تفاضل متقارن از قواعد محاسباتی زیر (که در آن A، B و C مجموعه‌هایی دلخواه هستند) پیروی می کند

$$A\triangle B = B\triangle A; \tag{الف}$$

(ب) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C);$

(ج) $A\triangle A = \emptyset; \quad A\triangle\emptyset = A;$

(د) $\complement A\triangle\complement B = A\triangle B;$

(ه) $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C);$

(و) $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)\triangle(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\triangle B_n)$

(برای دنباله‌های دلخواه (A_n) و (B_n) از مجموعه‌ها). ۳. از تمرین ۲ نتیجه بگیرید که زیرمجموعه‌ی $\mathcal{R}$ از $\rho(\Omega)$ یک حلقه در مجموعه‌ی Ω است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}$ نسبت به عمل $\triangle$ (به عنوان جمع) و $\cap$ (به عنوان ضرب) یک حلقه‌ی جابه جایی، به مفهوم مورد استفاده‌ی جبردانان، تشکیل بدهد.

۴. یک زیرمجموعه‌ی $\mathcal{N}$ از حلقه‌ی $\mathcal{R}$ در مجموعه‌ی Ω یک ایدال نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر را برآورده کند:

(الف) $\emptyset\in\mathcal{N};$

(ب) $N\in\mathcal{N}, M\in\mathcal{R}, M\subseteq N \ \Rightarrow\ M\in\mathcal{N};$

(ج) $M, N\in\mathcal{N} \ \Rightarrow\ M\cup N\in\mathcal{N}.$

در ادامه ی تمرین ۳ نشان دهید زیرمجموعه‌ی $\mathcal{N}$ از $\mathcal{R}$ یک ایدال در $\mathcal{R}$ است اگر و فقط اگر یک ایدال به مفهوم جبردانان در حلقه‌ی جابجایی $\mathcal{R}$ باشد. هر ایدال در $\mathcal{R}$ یک حلقه در $\mathcal{R}$ است.

۵. فرض کنیم $\Omega := \mathbb{N}$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\mathcal{A}_n$ نشان دهنده‌ی σ-جبر در Ω تولید شده به وسیله‌ی سامانه‌ی σ_n شامل تک عنصری‌های $\{۱\}, \{۲\}, ..., \{n\}$ باشد. نشان دهید $\mathcal{A}_n$ از همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω شامل $\{۱, ۲, ..., n\}$ و یا شامل مکمل این مجموعه، تشکیل می‌شود. واضح است که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}_{n+۱}$. چرا با این وجود، $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ یک σ-جبر در $\Omega=\mathbb{N}$ نیست؟

[راهنمایی: در حالت کلی برای هر دنباله‌ی صعودی $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از حلقه‌ها در یک مجموعه‌ی Ω، اجتماع $\mathcal{R}_n$ها شامل یک σ-جبر است اگر و تنها اگر از یک اندیس به بعد با هم برابر باشند. به اوردیک، سیمونز و سیمن [۱۹۷۹] و برای حالت خاص σ-جبرها، به بروتن و هاف [۱۹۷۷] رجوع کنید.]

بخش ۲ دستگاه‌های دینکین

بیشتر اوقات تشخیص مستقیم σ-جبر بودن یک سامانه ی داده شده از مجموعه‌ها، دشوار است. مفهوم زیر، که به دینکین [۱۹۶۱] و البته پیش از آن به سرپینسکی [۱۹۲۸] برمی گردد، به عبور از برخی از این دشواری‌ها کمک می کند.

تعریف ۱.۲. یک سامانه ی $\mathcal{D}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه ی Ω سامانه دینکین (در Ω) نامیده می شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\Omega\in\mathcal{D}; \tag{۱۳.۱}$$

$$D\in\mathcal{D} \ \Rightarrow\ \complement D\in\mathcal{D}; \tag{۱۴.۱}$$

$$D_n\in\mathcal{D} \ \Rightarrow\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\in\mathcal{D} \quad \text{دو دوبه مجزا برای } n\in\mathbb{N} \tag{۱۵.۱}$$

بنابراین هر سامانه ی دینکین $\mathcal{D}$ شامل مجموعه ی تهی $\complement\Omega=\emptyset$ است، و از آنجا (۱۵.۱) تضمین می کند که $\mathcal{D}$ شامل اجتماع هر گردایه ی دو به دو مجزای متناهی از مجموعه‌های خود است.

مثال. ۱. هر σ-جبر بوضوح یک سامانه ی دینکین است.

۲. فرض کنیم Ω یک مجموعه ی متناهی با تعداد زوج $۲n$ عنصر باشد ($n\in\mathbb{N}$). در این صورت سامانه ی $\mathcal{D}$ از تمام زیرمجموعه‌های D از Ω شامل تعدادی زوج عنصر یک سامانه ی دینکین است. در حالتی که $n>۱$، $\mathcal{D}$ جبر نیست؛ بنابراین مشخصاً یک σ-جبر نیز نیست.

ارتباط دقیق بین مفاهیم σ-جبر و سامانه دینکین در ملاحظات زیر آشکار می شود.

لم ۲.۲. هر سامانه ی دینکن $\mathcal{D}$ نسبت به تشکیل مکمل سره بسته است؛ بدین معنی که

$$D, E\in\mathcal{D},\ D\subseteq E \ \Rightarrow\ E\setminus D\in\mathcal{D}. \tag{۱۶.۱}$$

اثبات. بنا بر آنچه بعد از تعریف ۱.۲ خاطر نشان شد، مجموعه $D\cup\complement E$، به عنوان اجتماع مجموعه‌های مجزای D و $\complement E$ از $\mathcal{D}$، در $\mathcal{D}$ قرار دارد. اما در این صورت مکمل این مجموعه نسبت به Ω، یعنی $E\cap\complement D = E\setminus D$، در $\mathcal{D}$ قرار دارد. □

نتیجه آنکه، سامانه‌های دینکین با ویژگی‌های (۱۳.۱)، (۱۶.۱) و (۱۵.۱) نیز می توانند تعریف شوند.

قضیه ۳.۲. یک سامانه ی دینکین، دقیقاً هنگامی σ-جبر است که شامل اشتراک هر دو مجموعه اش باشد.

اثبات. باید نشان دهیم که هر سامانه ی دینکین بسته تحت اشتراک متناهی مانند $\mathcal{D}$، یک σ-جبر است. از ویژگی‌های معرف یک σ-جبر، تنها (۳.۱) باید تصدیق شود و لذا آن را انجام می دهیم طبق (۱۶.۱) و فرضیه پیوستار، $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$ در $\mathcal{D}$ قرار دارد هرگاه $A, B\in\mathcal{D}$. چون

$(A\backslash B)\cap B=\emptyset$ و $A\cup B=(A\backslash B)\cup B$، $\mathcal{D}$ شامل اجتماع هر دو است؛ بنابراین اجتماع هر تعداد متناهی از عناصرش را نیز شامل می شود. برای هر دنباله $(D_n)_n\in\mathbb{N}$ در $\mathcal{D}$، داریم

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}(D'_{n+1}\backslash D'_n)$$

که در آن $D'_0:=\emptyset$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $D'_n:=D_1\cup\ldots\cup D_n$. مجموعه‌های $D'_{n+1}\backslash D'_n$ دو به دو مجزایند و بنا به آنچه هم اکنون ثابت شده است، آنها در $\mathcal{D}$ قرار دارند. از اینرو بنا بر (۱۵.۱)، اجتماع مجموعه‌های D_n در $\mathcal{D}$ قرار دارد. □

همانند σ-جبرها، جبرها و حلقه‌ها، هر سامانه ی $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های Ω در یک کوچکترین سامانه ی دینکین قرار می گیرد که، البته، سامانه دینکین تولیدشده توسط $\mathcal{E}$ نامیده و با $\delta(\mathcal{E})$ نشان داده می شود.
اهمیت سامانه‌های دینکین پیش از هر چیز در واقعیت زیر نهفته است.

قضیه ۴.۲. هر زیرمجموعه‌ی بسته تحت اشتراک متناهی $\mathcal{E}$ از $\mathcal{P}(\Omega)$ شرط زیر را برآورده می‌کند

$$\delta(\mathcal{E})=\sigma(\mathcal{E}) \tag{۱۷.۱}$$

اثبات. چون هر σ-جبر یک سامانه‌ی دینکین است، $\sigma(\mathcal{E})$ یک سامانه‌ی دینکین شامل $\mathcal{E}$ است و در نتیجه $\delta(\mathcal{E})\subseteq\sigma\delta(\mathcal{E})$. اگر برعکس، می‌دانستیم $\delta(\mathcal{E})$ یک σ-جبر است، رابطه‌ی دوگان $\delta(\mathcal{E})\subseteq\sigma\delta(\mathcal{E})$ نیز نتیجه می‌شد. لذا بنا بر ۳.۲، کافی است نشان دهیم که $\delta(\mathcal{E})$ تحت اشتراک بسته است. برای اثبات این ویژگی، برای هر $D\in\delta(\mathcal{E})$، سامانه‌ی زیر را معرفی می‌کنیم

$$\mathcal{D}_D:=\{Q\in\mathcal{P}(\Omega)\ :\ Q\cap D\in\delta(\mathcal{E})\}.$$

بررسی ساده‌ای تصدیق می‌کند که $\mathcal{D}_D$ یک سامانه دینکین است. برای هر $E\in\mathcal{E}$، مفروضات روی $\mathcal{E}$ تضمین می‌کند که $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_E$ و از آنجا $\delta(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{D}_E$.بنابراین برای هر $D\in\delta(\mathcal{E})$ و هر $E\in\mathcal{E}$ داریم $E\cap D\in\delta(\mathcal{E})$؛ یعنی، $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_D$، و در نتیجه $\delta(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{D}_D$.اما این دقیقا همان ویژگی $\delta(\mathcal{E})$ است که باید تصدیق می‌شد. □

از این پس، سامانه‌های زیرمجموعه‌هایی که تحت اشتراک (به ترتیب، اجتماع) دو، و لذا هر تعداد متناهی، از مجموعه‌های خود بسته هستند، با عنوان $\cap$-پایا (به ترتیب، $\cup$-پایا) توصیف خواهند شد. **تمرین.** سامانه‌ی دینکین تولید شده توسط سامانه‌ی متشکل از تنها دو زیرمجموعه‌ی A و B از Ω را مشخص کنید. نشان دهید که $\delta(\mathcal{E})$ و $\sigma(\mathcal{E})$ بر هم منطبق می‌شوند صرفاً در حالتی که یکی از مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cap\complement B$، $\complement A\cap B$ یا $\complement A\cap\complement B$ تهی باشد.

بخش۳ محتوا، پیش اندازه، اندازه

ترکیب مفاهیم حلقه و σ-جبر با ویژگی‌های (B) و (C) طول، سطح و حجم که در مقدمه آشنا شدیم به مفاهیم پایه‌ای نظریه اعداد منجر می‌شود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{R}$ یک حلقه در Ω و μ یک تابع روی $\mathcal{R}$ با مقادیر در $[0,+\infty]$ باشد. در این صورت μ یک پیش اندازه روی $\mathcal{R}$ نامیده می‌شود هرگاه

$$\mu(\emptyset)=0 \tag{۱۸.۱}$$

و برای هر دنباله‌ی (A_i) از مجموعه‌های دو به دو مجزای $\mathcal{R}$ که اجتماع آنها در $\mathcal{R}$ قرار می‌گیرد،

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\qquad(\sigma\text{-جمعی}) \tag{۱۹.۱}$$

μ یک محتوا نامیده می‌شود اگر به جای (۱۹.۱) تنها برای هر (دو و لذا) تعداد متناهی مجموعه‌ی دو به دو مجزای $A_1,\ldots,A_n$ در $\mathcal{R}$ داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\qquad\text{جمعی متناهی} \tag{۲۰.۱}$$

بنا بر (۱۸.۱)، هر پیش اندازه بوضوح یک محتواست. برای مشاهده‌ی این گزاره، تنها کافی است در (۱۹.۱) قرار دهیم $A_{n+1}=A_{n+2}=\ldots=\emptyset$.

مثال.۱. برای هر حلقه‌ی $\mathcal{R}$ در Ω و هر نقطه‌ی Ω در Ω، تابع ξ_Ω تعریف شده روی $\mathcal{R}$ با دستور

$$\xi_\Omega(A):=\begin{cases}1 & \Omega\in A\\ 0 & w\notin A\end{cases} \tag{۲۱.۱}$$

یک پیش اندازه است؛ آن را پیش اندازه‌ی تعریف شده به وسیله‌ی جرم یکه در Ω می نامند.

۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$، σ-جبر تعریف شده در مثال ۲ از بخش ۱، به ازای یک مجموعه‌ی ناشمارای Ω مانند $\mathbb{R}$ باشد. بر اساس شمارایی A یا $\complement A$، $\mu(A)$ را برابر ۰ یا ۱ تعریف می‌کنیم. چون از دو زیرمجموعه‌ی مجزای Ω، حداکثر یکی از آنها می‌تواند مکمل شمارا داشته باشد، ویژگی (۱۹.۱) به آسانی تصدیق می‌شود؛ بنابراین μ یک پیش اندازه روی $\mathcal{A}$ است.

۳. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر تعریف شده در مثال ۹ از بخش ۱ به ازای یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی Ω باشد. بر اساس متناهی بودن A یا $\complement A$، $\mu(A)$ را برابر ۰ یا ۱ تعریف می‌کنیم. در این صورت μ یک محتواست اما پیش اندازه نیست. ادعای اول، اثباتی مشابه با مثال قبل دارد، ادعای دوم از این واقعیت نتیجه می‌شود که Ω اجتماع مجزای تعدادی شمارا مجموعه‌ی تک عنصری است.

۴. فرض کنیم $\mu_۱$، $\mu_۲$،... دنباله‌ای از محتواها (اندازه)ها روی یک حلقه $\mathcal{R}$، و فرض کنیم $\alpha_۱$، $\alpha_۲$،... یک دنباله از اعداد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت

$$\mu := \sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n \mu_n$$

نیز یک محتوا (پیش اندازه) روی $\mathcal{R}$ است.

هر محتوای μ روی یک حلقه‌ی $\mathcal{R}$ (به ازای $A, B, A_۱, B_۱, \ldots \in \mathcal{R}$) از ویژگی‌های زیر برخوردار است

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B); \qquad (۲۲.۱)$$

$$A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B) \qquad \text{صعودی} \qquad (۲۳.۱)$$

$$A \subset B, \mu(A) < +\infty \;\Rightarrow\; \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \qquad \text{تفریقی} \qquad (۲۴.۱)$$

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i) \leq \sum_{i=۱}^{n} \mu(A_i) \qquad \text{زیرجمعی} \qquad (۲۵.۱)$$

و برای هر دنباله‌ی دو به دو مجزای (A_n) از عناصر $\mathcal{R}$ با اجتماع متعلق به $\mathcal{R}$،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n). \qquad (۲۶.۱)$$

اثبات. برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B در $\mathcal{R}$،

$$A \cup B = A \cup (B \backslash A) \quad \text{و} \quad B = (A \cap B) \cup (B \backslash A).$$

بنا بر جمعی متناهی بودن μ، از این برابری‌ها نتیجه می‌شود که

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \quad \text{و} \quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A),$$

و از جمع دو برابری اخیر،

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \backslash A).$$

در حالتی که $\mu(B \backslash A)$ متناهی است، (۲۲.۱) از این برابری نتیجه می‌شود. در حالتی که $\mu(B \backslash A) = +\infty$، دستورهای $\mu(A \cup B)$ و $\mu(B)$ نشان می‌دهند که هر یک از این دو نیز باید برابر $+\infty$ باشند و لذا (؟؟) در این حالت نیز صدق می‌کند. اگر $A \subseteq B$، دستور اخیر برای $\mu(B)$ بیان می‌کند که

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A),$$

که به واسطه‌ی $\mu \geq ۰$، هر دو ویژگی (۲۳.۱) و (۲۴.۱) را تحویل می‌دهد. اگر قرار دهیم $B_۱ := A_۱$، $B_۲ := A_۲ \backslash A_۱$، ...، $B_n := A_n \backslash (A_۱ \cup \ldots A_{n-۱})$،...، آن گاه $B_۱, \ldots, B_n$ مجموعه‌هایی دو به دو مجزا از $\mathcal{R}$ هستند که موجب می‌شود

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{n} B_i) = \sum_{i=۱}^{n} \mu(B_i).$$

حال از این واقعیت که $B_i \subseteq A_i$ $(i = ۱, \ldots, n)$، μ صعودی است و $\cup_{i=۱}^{n} B_i = \cup_{i=۱}^{n} A_i$، ویژگی (؟؟) به دست می‌آید. برای اثبات (۲۶.۱)، تنها باید ملاحظه کنیم که برای هر دنباله‌ی $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از مجموعه‌های دو به دو مجزای $\mathcal{R}$ با شرط $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$،

$$\mu(A_۱) + \ldots + \mu(A_m) = \mu(A_۱ \cup \ldots \cup A_m) \leq \mu(A) \quad (m \in \mathbb{N})$$

و m را به سمت ∞ میل دهید. □

بالاخره اگر μ یک پیش اندازه روی $\mathcal{R}$، آن گاه برای مجموعه‌های $A_۰$، $A_۱$، ... در $\mathcal{R}$ داریم

$$A_۰ \subset \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \;\Rightarrow\; \mu(A_۰) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n). \qquad (۲۷.۱)$$

بنا بر $A_\circ = \cup(A_\circ \cap A_n)$ و (۲۳.۱)، برای بررسی (۲۷.۱)، می‌توانیم فرض کنیم که $A_\circ = \cup A_n$. در این صورت قرار می‌دهیم $B_1 := A_1$، $B_2 := A_2 \backslash A_1$، ...، $B_n := A_n \backslash (A_1 \cup ... \cup A_{n-1})$ و همانند اثبات (۲۵.۱) ادامه می‌دهیم. در حالت خاص، هرگاه همه‌ی مجموعه‌های A_n و نیز اجتماع آنها در $\mathcal{R}$ باشند، داریم

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{۲۸.۱}$$

قضیه‌ی زیر، پیش اندازه‌ها را با ویژگی‌های دیگری مرتبط با ویژگی σ-جمعی مشخص می‌کند. بیان آن با استفاده از نمادهای زیر به ازای مجموعه‌های E_1، E_2، ... ساده‌تر می‌شود.

$$E_n \uparrow E \quad \text{و} \quad E_n \downarrow E \tag{۲۹.۱}$$

به ترتیب بدین معنی که ... $E_1 \subseteq E_2 \subseteq$ صادق در $E = \cup E_n$ و ... $E_1 \supseteq E_2 \supseteq$ صادق در $E = \cap E_n$. به عبارت دیگر، دنباله‌ی (E_n) یا به طور تکنوا به E صعود می‌کند یا به طور پادنوا به E نزول می‌کند.

قضیه ۲.۳. برای یک محتوای μ روی حلقه‌ی $\mathcal{R}$ گزاره‌های زیر را درنظر بگیرید.
(الف) μ یک پیش اندازه است.
(ب) $A_n, A \in \mathcal{R}$ با شرط $A_n \uparrow A$ ایجاب می‌کند که $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. (پیوستگی از پایین)
(ج) $A_n, A \in \mathcal{R}$ با شرط $A_n \downarrow A$ و $\mu(A_n) < +\infty$ برای هر n ایجاب می‌کند که $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. (پیوستگی از بالا)
(د) $A_n \in \mathcal{R}$ با شرط $A_n \uparrow \emptyset$ و $\mu(A_n) < +\infty$ برای هر n ایجاب می‌کند که $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. (پیوستگی در $\emptyset$)
در این صورت استلزام‌های زیر برقرارند

(الف) $\Leftrightarrow$ (ب) $\Rightarrow$ (ج) $\Leftrightarrow$ (د).

اگر μ روی $\mathcal{R}$ متناهی باشد، $\mu(A) < +\infty$ برای هر $A \in \mathcal{R}$، آن گاه چهار گزاره (الف) تا (د) هم ارزند.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). با تعریف $A_\circ := \emptyset$، مجموعه‌های $B_n := A_n \backslash A_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ که دو به دو مجزایند، در $\mathcal{R}$ قرار دارند و شرایط زیر را برآورده می‌سازند

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \, , \; A_n = B_1 \cup ... \cup B_n.$$

از اینرو بنا بر σ-جمعی بودن μ،

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ب) $\Leftarrow$ (الف). فرض کنیم (A_n) یک دنباله از مجموعه‌های دوبه دو مجزا در $\mathcal{R}$ باشد که اجتماع آنها $A := \cup A_n$ نیز در $\mathcal{R}$ قرار دارد. اگر قرار دهیم $B_n := A_1 \cup ... \cup A_n$، آن گاه $B_n \in \mathcal{R}$ و $B_n \uparrow A$؛ بنابراین $\mu(A) = \lim \mu(B_n)$. به عنوان نتیجه‌ای از جمعی بودن μ،

$$\mu(B_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$$

و لذا $\mu(A) = \sum \mu(A_n)$. پس μ، σ-جمعی است و در نتیجه یک پیش اندازه است.
(ب) $\Leftarrow$ (ج). طبق (؟؟)، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$. از $A_n \downarrow A$ نتیجه می شود $A_1 \backslash A_n \uparrow A_1 \backslash A$ و همه‌ی مجموعه‌های ظاهر شده در اینجا در $\mathcal{R}$ هستند. بنابراین از (ب) داریم

$$\mu(A_1 \backslash A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

از این برابری، (ج) نتیجه می شود زیرا $A \subseteq A_n$ بدین معنی است که $\mu(A) < +\infty$ و لذا

$$\mu(A_1 \backslash A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

(ج)$\Leftarrow$ (د). در اینجا، چیزی برای اثبات وجود ندارد!
(د) $\Leftarrow$ (ج). از $A_n \downarrow A$ نتیجه می شود $A_n \backslash A \downarrow \emptyset$. چون $A_n \backslash A \subseteq A_n$، یکنوایی μ ایجاد می کند که همراه با $\mu(A_n)$، $\mu(A_n \backslash A)$ نیز متناهی است. از اینرو بنا بر (د) داریم $\lim \mu(A_n \backslash A) = 0$. اما در این صورت (ج) نتیجه می شود زیرا $\mu(A) \leq \mu(A_n) < +\infty$ برابری $\mu(A_n \backslash A)$ با $\mu(A_n) - \mu(A)$ را موجب می شود.
برای اتمام اثبات، حالتی را درنظر می گیریم که μ متناهی است و نشان می دهیم که در این صورت (د) $\Leftarrow$ (ب). اگر (A_n) یک دنباله از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{R}$ باشد و $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$، آن گاه $A \backslash A_n \downarrow \emptyset$. بنابراین، توجه به متناهی بودن μ، نتیجه می دهد که

$$0 = \lim \mu(A \backslash A_n) = \lim[\mu(A) - \mu(A_n)]$$

و از آنجا (ب) حاصل می شود. □

ملاحظه. اگر کسی مثال ۳ از این بخش را با اختیار $\mu(A) := ۰$ برای مجموعه‌های متناهی A و $\mu(A) := +\infty$ برای مجموعه‌های هم متناهی A، تغییر دهد، آن گاه یک محتوا به دست می آورد که در $\emptyset$ پیوسته است ولی یک پیش اندازه نیست. پس بدون فرض متناهی بودن در قضیه ی قبل، گزاره‌های (الف) تا (د) در حالت کلی هم ارز نیستند. از طرف دیگر، در (ج) و (د)، کافی است به ازای یک $n \in \mathbb{N}$، صریحاً فرض کنیم $\mu(A_n) < +\infty$، زیرا در این صورت $\mu(A_m) < +\infty$ برای هر $m \geq n$ (صعودی بودن).
مفاهیم محتوا و پیش اندازه مقدمه ای برای مفهوم اصلی این کتاب یعنی اندازه هستند.

تعریف ۳.۳. یک پیش اندازه تعریف شده روی یک σ-جبر $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه ی Ω یک اندازه (روی $\mathcal{A}$) نامیده می شود. مقدار $\mu(A)$ از تابع μ در یک مجموعه ی A در $\mathcal{A}$، $(\mu-)$ اندازه ی یا $(\mu-)$ جرم A نامیده می شود. هرگاه $\mu(\Omega) < +\infty$ (و در نتیجه برای هر A در $\mathcal{A}$ داشته باشیم $\mu(A) < +\infty$)، اندازه ی μ، متناهی نامیده می شود.

پس یک اندازه یک تابع عددی نامنفی μ تعریف شده روی یک σ-جبر $\mathcal{A}$ و برخوردار از ویژگی‌های (۱۸.۱)زیر است. تابع ثابت $\mu = ۰$ یک اندازه روی هر σ-جبر، معروف به اندازه ی صفر است. مثال‌هایی که در ادامه می آیند باز هم از یک طبیعت نسبتاً صوری برخوردارند.

مثال. ۵. اگر برای حلقه ی $\mathcal{R}$ در مثال ۱ یک σ-جبر در Ω اختیار شود، آن گاه ξ_Ω یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است که اندازه ی تعریف شده توسط یک جرم نقطه ای یکه در ω، یا مختصرتر جرم یکه در ω و نیز اندازه ی دیراک در ω نامیده می شود. این اصطلاح از تعبیر یک اندازه μ روی یک σ-جبر در Ω به عنوان یک توزیع روی Ω ناشی می شود. مطابق آن، برای $A \in \mathcal{A}$، $\mu(A)$ به عنوان یک جرم نگریسته می شود. اندازه ی دیراک در ω، تا آنجا که مجموعه ی تک عنصری $\{\omega\}$ در $\mathcal{A}$ قرار دارد، همه ی جرم‌های یکه ی خود را در نقطه ی ω متمرکز دارد: $\xi_\omega(\{\omega\}) := ۱$ و $\xi_\omega(\complement\{\omega\}) = ۰$.

۶. فرض کنیم Ω یک مجموعه ی دلخواه باشد. برای هر A در $\mathcal{P}(\Omega)$، فرض کنیم $|A|$، تعداد عناصر A در حالتی که A متناهی است و در غیر اینصورت $+\infty$ را نشان دهد. در این صورت $\xi(A) := |A|$ یک اندازه روی $\mathcal{P}(\Omega)$ تعریف می کند که اندازه ی شمارشی روی Ω (یا روی $\mathcal{P}(\Omega)$) نام دارد؛ تحدید آن به یک σ-جبر $\mathcal{A}$ در Ω اندازه ی شمارشی روی $\mathcal{A}$ نامیده می شود.

۷. پیش اندازه تعریف شده در مثال ۲ یک اندازه است.

در ادامه، یک پیامد نه چندان بدیهی از σ-جمعی بودن اندازه‌ها به دست می آوریم.

لم ۴.۳. فرض کنیم μ یک اندازه روی یک σ-جبر $\mathcal{A}$ و $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{A}$ باشد. فرض کنیم عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که مجموعه‌های A_m و A_n مجزایند هرگاه زیرنویس آنها در $|m-n| \geq k$ صدق کند. در این صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n) \leq k\mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n). \qquad (۳۰.۱)$$

وقتی $k = ۱$، این دقیقاً ایجاب σ-جمعی بودن اندازه ی μ است.

اثبات. اجتماع همه ی A_nها را با C نمایش می دهیم. برای هر $r = ۱, ..., k$، مجموعه‌های $(A_{r+mk})_{m\in\mathbb{N}}$. دو به دو مجزایند. لذا اگر قرار دهیم

$$F_r := \bigcup_{m=۰}^{\infty} A_{r+mk},$$

آن گاه

$$\sum_{m=۱}^{\infty} \mu(A_{r+mk}) = \mu(F_r) \leq \mu(C)$$

زیرا $F_r \subseteq C$. چون مجموع یک سری از جملات نامنفی، مستقل از ترتیب جملات آن است، نتیجه می گیریم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{r=۱}^{k} \mu(F_r).$$

از این برابری و نابرابری قبل، نابرابری مورد نظر را می توان استنتاج نمود. □

تمرین.۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه ی ناتهی متناهی باشد. نشان دهید که اندازه ی شمارشی ζ روی $\mathcal{P}(\Omega)$ بر $\sum_{\Omega\in\Omega} \xi_w$ منطبق است. به علاوه، نشان دهید که هر اندازه μ روی $\mathcal{P}(\Omega)$ به صورت $\mu = \sum_{\omega\in w} \alpha_\omega \xi_\omega$ با شرط $\alpha_\omega := \mu(\{\omega\})$ است.

۲. برای یک محتوای متناهی μ روی یک حلقه ی $\mathcal{R}$، دستور ورودی-خروجی زیر، تعمیم دهنده ی برابری (۲۲.۱) را ثابت کنید.

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i) = \sum_{i=۱}^{n} \mu(A_i) \quad - \quad \sum_{۱\leq i\leq j\leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{۱\leq i\leq j\leq k\leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \quad + ... + (-۱)^{n-۱}\mu(A_۱ \cap ... \cap A_n).$$

۳. برای یک پیش اندازه μ روی یک حلقه $\mathcal{R}$ در Ω تعریف کنید

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \cap R \in \mathcal{R} \text{ برای هر } R \in \mathcal{R}\}$$

$$\tilde{\mu}(A) := \sup\{\mu(R) : R \subset A, R \in \mathcal{R}, \quad \text{برای هر} \quad A \in \tilde{\mathcal{R}}.$$

نشان دهید که $\tilde{\mathcal{R}}$ یک جبر در Ω است که $\mathcal{R}$ را شامل می شود و $\tilde{\mu}$ یک پیش اندازه روی $\tilde{\mathcal{R}}$ است که μ را توسیع می دهد.

۴. فرض کنیم که $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله‌ی صعودی از پیش اندازه‌های روی یک حلقه مشترک $\mathcal{R}$ باشد؛ یعنی، برای هر $A \in \mathcal{R}$ و $n \in \mathbb{N}$، شرط $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ برآورده می شود. نشان دهید که توسط $\mu(A) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$ یک پیش اندازه ی μ روی $\mathcal{R}$ تعریف می شود.

۵. فرض کنیم μ یک اندازه روی یک σ-جبر $\mathcal{A}$ باشد. با $\mathcal{N}_\mu$ مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های μ پوچ- (μ-فراموش شدنی) را نمایش می دهیم؛ یعنی، عناصر N از $\mathcal{A}$ که به ازای آن $\mu(N) = 0$. نشان دهید $\mathcal{N}_\mu$ دارای ویژگی‌های زیر است

$$\emptyset \in \mathcal{N}_\mu; \qquad \text{(الف)}$$
$$N \in \mathcal{N}_\mu, M \in \mathcal{A}, M \subseteq N \;\Rightarrow\; M \in \mathcal{N}_\mu; \qquad \text{(ب)}$$
$$(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N}_\mu \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_\mu. \qquad \text{(ج)}$$

زیر مجموعه‌های $\mathcal{A}$ با این ویژگی‌ها، ایدآل σ- در $\mathcal{A}$ نامیده می شوند. پس $\mathcal{N}_\mu$ یک σ-ایدآل است (به تمرین ۴ از بخش ۱ مراجعه کنید).

□□□□□□□ نظریه‌ی انتگرال‌گیری فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ داده شده است. در اینجا مساله‌ی اختصاص یک انتگرال به هر تابع روی Ω از یک رده‌ی در حد امکان بزرگ را مطرح می‌کنیم؛ یعنی، اختصاص یک «مقدار میانگین» ساخته شده نسبت به μ. بعد از مقدمه‌ی بخش ۹ درباره‌ی ویژگی اساسی اندازه‌پذیری، این مساله، گام به گام در بخش‌های ۱۰ تا ۱۲ حل خواهد شد. بخش‌های آخر این فصل به بنای این نظریه و کشف کاربردهای فرآیند انتگرال‌گیری بدینسان تعریف شده، اختصاص یافته است.

بخش۴ توابع عددی اندازه‌پذیر

روی خط حقیقی $\mathbb{R}$، σ- جبر $\mathcal{B}^1$ از مجموعه‌های بورل را تعریف کرده‌ایم. هرگاه $\mathbb{R}$ را به روش معمولی با اضافه کردن نقاط «ایدال» $-\infty$ و $+\infty$ به $\overline{\mathbb{R}}$ فشرده کنیم، زیرمجموعه‌های A از $\overline{\mathbb{R}}$ با شرط $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1$، بورل در $\overline{\mathbb{R}}$ نامیده می‌شوند. در حقیقت، مجموعه‌های بورل در $\overline{\mathbb{R}}$ دقیقا همه‌ی مجموعه‌های B، $B \cup \{-\infty\}$، $B \cup \{+\infty\}$ و $B \cup \{-\infty, +\infty\}$ با شرط $B \in \mathcal{B}^1$ هستند. سامانه‌ی $\overline{\mathcal{B}}^1$ متشکل از این مجموعه‌ها بوضوح یک σ- جبر در $\overline{\mathbb{R}}$ است که رد (اثر) آن در $\mathbb{R}$ همان $\mathcal{B}^1$ است؛ یعنی،

$$\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1. \qquad (۳۱.۱)$$

حال اگر $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه باشد، $\mathcal{A}$- $\overline{\mathcal{B}}^1$- اندازه پذیری توابع $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ تعریف می‌شود. از این پس چنین توابعی، توابع عددی $(\mathcal{A})$- اندازه‌پذیر روی Ω نامیده خواهند شد. به خصوص توابع حقیقی $f : \Omega \to \mathbb{R}$، توابع عددی خاصی هستند؛ با توجه به (۳۱.۱)، $\mathcal{A}$- $\overline{\mathcal{B}}^1$- اندازه‌پذیری این تابع دقیقا همان $\mathcal{A}$- $\mathcal{B}^1$- اندازه پذیری است.

مثال. ۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و A یک زیرمجموعه‌ی Ω باشد. تابع تابع شاخص (همچنین گاهی تابع مشخصه‌ی) A نامیده می‌شود.

فصل دوم

نظریه‌ی انتگرال‌گیری

فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ داده شده است. در اینجا مساله‌ی اختصاص یک انتگرال به هر تابع روی Ω از یک رده‌ی در حد امکان بزرگ را مطرح می‌کنیم؛ یعنی، اختصاص یک «مقدار میانگین» ساخته شده نسبت به μ. بعد از مقدمه‌ی بخش ۹ درباره‌ی ویژگی اساسی اندازه‌پذیری، این مساله، گام به گام در بخش‌های ۱۰ تا ۱۲ حل خواهد شد. بخش‌های آخر این فصل به بنای این نظریه و کشف کاربردهای فرآیند انتگرال‌گیری بدینسان تعریف شده، اختصاص یافته است.

بخش ۱ توابع عددی اندازه‌پذیر

روی خط حقیقی $\mathbb{R}$، σ- جبر $\mathcal{B}^1$ از مجموعه‌های بورل را تعریف کرده‌ایم. هرگاه $\mathbb{R}$ را به روش معمولی با اضافه کردن نقاط «ایدال» $-\infty$ و $+\infty$ به $\overline{\mathbb{R}}$ فشرده کنیم، زیرمجموعه‌های A از $\overline{\mathbb{R}}$ با شرط $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1$، بورل در $\overline{\mathbb{R}}$ نامیده می‌شوند. در حقیقت، مجموعه‌های بورل در $\overline{\mathbb{R}}$ دقیقا همه‌ی مجموعه‌های B، $B \cup \{-\infty\}$، $B \cup \{+\infty\}$ و $B \cup \{-\infty, +\infty\}$ با شرط $B \in \mathcal{B}^1$ هستند. سامانه‌ی $\overline{\mathcal{B}}^1$ متشکل از این مجموعه‌ها بوضوح یک σ- جبر در $\overline{\mathbb{R}}$ است که رد (اثر) آن در $\mathbb{R}$ همان $\mathcal{B}^1$ است؛ یعنی،

$$\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1. \tag{1.2}$$

حال اگر $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه باشد، $\mathcal{A}$- $\overline{\mathcal{B}}^1$- اندازه پذیری توابع $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ تعریف می‌شود. از این پس چنین توابعی، توابع عددی $(\mathcal{A})$- اندازه‌پذیر روی Ω نامیده خواهند شد. به خصوص توابع حقیقی $f : \Omega \to \mathbb{R}$، توابع عددی خاصی هستند؛ با توجه به (۳۱.۱)، $\mathcal{A}$- $\overline{\mathcal{B}}^1$- اندازه‌پذیری این تابع دقیقا همان $\mathcal{A}$- $\mathcal{B}^1$- اندازه پذیری است.

مثال. ۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mathcal{A}$ یک زیرمجموعه‌ی Ω باشد. تابع تابع شاخص (همچنین گاهی تابع مشخصه‌ی) A نامیده می‌شود.