فهرست مطالب

فصل اول

نظریه‌ی اندازه

در هندسه‌ی مقدماتی، به زیر مجموعه‌های ساده‌ی هندسی خط، صفحه، و فضای سه بعدی، «اندازه‌هایی عددی» به نام طول، مساحت و حجم اختصاص داده می‌شود. ابتدا آنچه به طور شهودی بدیهی است این است که طول یک پاره خط، مساحت یک مستطیل و حجم یک مکعب، چطور باید تعریف شود. با عبور از این مرحله، با استفاده از روش‌های هندسه‌ی مقدماتی، طول، مساحت، و حجم مجموعه‌های پیچیده‌تری را می‌توانیم مشخص کنیم در صورتی که قواعد محاسباتی مشخصی را برای کار با این اندازه‌های عددی بپذیریم.

برای مثال اگر به برآورد اولیه‌ی مساحت یک مثلث باز (توپولوژیک) بیندیشیم، می‌توانیم با تجربه ی آن توسط یک ارتفاع به دو مثلث قائم الزاویه‌ی باز و خود ارتفاع شروع کنیم. به علاوه یادآوری می‌کنیم که هر مثلث قائم الزاویه از درج یک قطر در یک مستطیل مناسب حاصل می‌شود. به هر پاره خط، اندازه‌ی عددی صفر اختصاص می‌یابد هرگاه به عنوان یک سطح در نظر گرفته شود. بنابراین دو قاعده‌ی محاسباتی زیر به تعیین مساحت مثلث‌ها منجر می‌شود

(الف) اگر مجموعه‌ی A دارای اندازه‌ی عددی α و B مشابه A باشد، آن‌گاه B نیز اندازه‌ی عددی α دارد.

(ب) اگر A و B مجموعه‌ای مجزا به ترتیب با اندازه‌های عددی α و β باشند، آن‌گاه $A \cup B$ دارای اندازه‌ی عددی $\alpha + \beta$ است.

محدودیت ملاحظات هندسی مقدماتی از این دست، پیش از این نیز در تعریف مساحت یک قرص باز K دیده شده است: یک دنباله از $۲^{n-۱} \times ۳$-ضلعی‌های باز E_n $(n \in \mathbb{N})$ در K محاط می‌شوند به طوری که $E_۱$ یک مثلث متساوی الاضلاع است و رئوس $E_{n+۱}$ رئوس E_n همراه با فصل مشترک دایره‌ی با شعاع عمود به اضلاع E_n است. پس $E_{n+۱}$ متشکل است از E_n همراه با $۲^{n-۱} \times ۳$ یال خود و مثلث‌های متساوی الساقین باز که این یال‌ها را به عنوان وتر و رأس خود را روی دایره دارند. چون K اجتماع همه‌ی این E_nهاست، شبیه یک «کفپوش از مثلث‌ها» به نظر می رسد؛ در واقع، شبیه اجتماعی از مثلث‌های باز مجزا و پاره خط‌ها (یعنی، اضلاع مشترک مثلث‌های مختلف). بنابراین صورت تعمیم یافته‌ی زیر از (ب) به تعریفی از مساحت قرص K منجر می‌شود. (ج) اگر (A_n) یک دنباله از مجموعه‌های دو به دو مجزا باشد و A_n دارای اندازه‌ی عددی α_n $(?)$ باشد، آن گاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n$ دارای اندازه‌ی عددی $\sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n$ است.

اگر K و هر E_n را با بستار توپولوژیک آن جایگزین کنیم، این روش به یک تعریف قابل قبول برای مساحت قرص بسته‌ی $\overline{K}$ منجر نمی‌شود، زیرا $\overline{K}$ اجتماع بستارهای $\overline{E_n}$ از چندضلعی‌های E_n ساخته شده در بالا نیست. ویژگی

نامطلوب روند هندسه مقدماتی، دقیقا در ضرورت انتخاب یک روش خاص تجزیه، متناسب با مجموعه‌ی K است که برای نیل به یک اندازه‌ی عددی درنظر گرفته می‌شود.

جستجوی یک روش کلی که با آن مانند بسیاری از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ (برای عنصر دلخواه d از N؟) بتوان «در حد امکان» از یک راه طبیعی، یک حجم d-بعدی به عنوان اندازه‌ی عددی اختصاص داد، آن چیزی است که نهایتاً به یک گرایش ریاضی به نام نظریه‌ی اندازه منجر می‌شود. محتوای اصلی این فصل، پاسخی است که نظریه‌ی اندازه‌ی حاصل از این جستجو ارایه می‌کند. خواهیم دید که کلید این پاسخ در قاعده‌ی (ج) قرار دارد، و اینکه این قاعده از «اندازه‌های عددی» بسیار کلی‌تری پیروی می‌کند که در موقعیت‌هایی نسبتاً دور از شهود هندسی اولیه‌ی شخص رخ می‌دهد. این دقیقا همان استدلال اخیر است که تنوع زمینه‌های کاربرد نظریه‌ی اندازه در آنالیز، هندسه و فرایندهای تصادفی را توضیح می‌دهد.

بخش ۱ σ -جبرها و مولدهای آن

فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعه‌ی توانی آن، یعنی، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω را نشان دهد. در این صورت همراه با هر خانواده‌ی $(A_i)_{i\in I}$ از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{P}(\Omega)$، اجتماع $\cup_{i\in I}A_i$ و اشتراک $\cap_{i\in I}A_i$ نیز متعلق به $\mathcal{P}(\Omega)$ هستند. به علاوه $\mathcal{P}(\Omega)$ شامل مکمل $\complement A$ از هر مجموعه‌ی A در خودش است.

در ادامه به مطالعه‌ی زیرسامانه‌های $\mathcal{A}$ از $\mathcal{P}(\Omega)$ می‌پردازیم که خواصی مشابه با $\mathcal{P}(\Omega)$ ،حداقل برای مجموعه‌ی زیرنویس‌های شمارش پذیر I دارند؛ طبق قراردادهای ذکر شده در مقدمه، مجموعه‌های شمارش پذیر، مجموعه‌هایی هستند که متناهی یا شمارش پذیر نامتناهی‌اند. \swapnumbers

۱.۱ تعریف. یک سامانه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، یک σ-جبر (در Ω) نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{۱.۱}$$

$$A\in\mathcal{A}\Rightarrow \mathcal{A}\in\mathcal{A} \tag{۲.۱}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}\subset\mathcal{A}}\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}}^{n}\in\mathcal{A} \tag{۳.۱}$$

مثال.۱. $\mathcal{P}(\Omega)$ همواره یک σ-جبر است.

۲. برای هر مجموعه‌ی Ω، سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های آن که شمارش‌پذیر یا هم‌شمارش‌پذیر هستند (یعنی، زیرمجموعه‌های A از Ω به طوری که A یا $\complement A$ شمارش‌پذیر باشد) یک σ-جبر تشکیل می‌دهد. ویژگی (۳.۱) به صورت زیر ثابت می‌شود. اگر هر A_n شمارش‌پذیر باشد، آن گاه اجتماع $\bigcup_{n\in ?N}A_n$ نیز همین طور است. اگر A_n وجود داشته باشد که شمارش‌پذیر نباشد، آن گاه مکمل آن شمارش‌پذیر است، و مجموعه‌ی $\complement C\bigcup_{n\in\mathbb{N}A_n}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\complement A_n$ نیز به عنوان زیرمجموعه‌ی $\complement A_n$ شمارش‌پذیر است.

۳. اگر $\mathcal{A}$ یک σ-جبر در یک مجموعه‌ی Ω و Ω' یک زیرمجموعه‌ی Ω باشد، آن‌گاه

$$\Omega'\cap\mathcal{A}:=\{\Omega'\cap A : A\in\mathcal{A}\} \tag{۴.۱}$$

معروف به اثر $\mathcal{A}$ در Ω'، یک σ-جبر در Ω' است. در حالتی که $\Omega'\in\mathcal{A}$، نماد $\Omega'\cap\mathcal{A}$ به طور ساده، همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω' متعلق به $\mathcal{A}$ را نشان می‌دهد.

۴. فرض کنیم Ω و Ω' دو مجموعه، $\mathcal{A}'$ یک σ-جبر در Ω' و $T:\Omega\to\Omega'$ یک نگاشت باشد. در این صورت بنابر ویژگی‌های آشنای عمل‌های نظریه مجموعه‌ها، تحت تصویر وارون، سامانه‌ی متشکل از مجموعه‌های زیر یک σ-جبر است

$$T^{-1}(\mathcal{A}):=\{T^{-1}(A') : A'\in\mathcal{A}\}. \tag{۵.۱}$$

هر σ–جبر $\mathcal{A}$ دارای ویژگی‌های «دوگان» برای (۱.۱) و (۳.۱) است؛ یعنی،

$$\emptyset \in \mathcal{A}, \tag{۶.۱}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \tag{۷.۱}$$

که این ویژگی‌ها از (۱.۱)–(۳.۱) و برابری‌های $\emptyset = \complement\Omega$ و $\cap A_n = \complement(\cup\complement A_n)$ به دست می‌آیند. به علاوه

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

و

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \Omega \cap \Omega \cap \ldots$$

بنابراین $\mathcal{A}$ شامل اجتماع و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های خودش نیز هست. همچنین از این مشاهدات و (۲.۱) داریم

$$A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A\backslash B = A \cap \complement B \in \mathcal{A}. \tag{۸.۱}$$

برای ساختن σ–جبرها، قضیه‌ی زیر از اهمیت خاصی برخوردار است.

۲.۱ قضیه. اشتراک $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ از هر خانواده‌ی $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ از σ–جبرها در یک مجموعه‌ی یکسان Ω، یک σ–جبر در Ω است.

اثبات این قضیه تنها یک بررسی ساده‌ی ویژگی‌های (۱.۱)–(۳.۱) می‌باشد. در نتیجه برای هر دستگاه $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های Ω کوچکترین σ–جبر $\sigma(\mathcal{E})$ شامل $\mathcal{E}$ وجود دارد؛ یعنی، $\sigma(\mathcal{E})$ یک σ–جبر در Ω با ویژگی‌های زیر است

(۱) $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$،

(۲) برای هر σ–جبر $\mathcal{A}$ در Ω با شرط $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ داریم $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

برای اثبات فرض کنیم Σ سامانه‌ی همه‌ی σ–جبرهای $\mathcal{A}$ در Ω با شرط $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ است؛ برای مثال، $\mathcal{P}(\Omega)$ یک عضو از Σ است. در این صورت $\sigma(\mathcal{E})$ اشتراک همه‌ی عناصر $\mathcal{A} \in \Sigma$ است که طبق ۲.۱، دارای همه ی ویژگی‌های مطلوب است.

$\sigma(\mathcal{E})$، σ–جبر تولیدشده به وسیله‌ی $\mathcal{E}$ (در Ω) و $\mathcal{E}$ مولد $\sigma(\mathcal{E})$ نامیده می‌شود. **مثال.** ۵. اگر $\mathcal{E}$ یک σ–جبر در Ω باشد، آن گاه $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E})$.

۶. اگر $\mathcal{E}$ تنها از یک زیرمجموعه‌ی A از Ω تشکیل شده باشد، آن گاه $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, \complement A, \Omega\}$.

۷. جبر مثال ۲ به وسیله‌ی سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی Ω تولید شده است.

سامانه‌های متعددی از مجموعه‌های دارای تنها برخی از خواص σ–جبرها، مکرراً به عنوان مولد درنظر گرفته می‌شوند. از نمونه‌های خاص جالب توجه، حلقه‌هایی از مجموعه‌ها هستند.

۳.۱ تعریف. یک سامانه $\mathcal{R}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω یک حلقه (در Ω) نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\emptyset \in \mathcal{R}; \tag{۹.۱}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A\backslash B \in \mathcal{R}; \tag{۱۰.۱}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{R}. \tag{۱۱.۱}$$

اگر، به علاوه

$$\Omega \in \mathcal{R} \tag{۱۲.۱}$$

آن گاه $\mathcal{R}$ یک جبر (در Ω) نامیده می‌شود.

یک حلقه، نه تنها اجتماع، بلکه اشتراک هر دو مجموعه‌ی خود (و لذا هر گردایه متناهی از مجموعه‌های خود) را نیز شامل می‌شود.

۴.۱ قضیه. یک سامانه $\mathcal{R}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω یک جبر است اگر و فقط اگر دارای ویژگی‌های (۱.۱)، (۲.۱) و (۱۱.۱) باشد.

اثبات. با توجه به تعریف، یک جبر دارای ویژگی‌های (۱.۱)، (۱۱.۱) و (۱۰.۱) است که از ویژگی آخر، (۲.۱) نتیجه می‌شود. گزاره‌ی عکس، از این واقعیت که $\complement\Omega = \emptyset$ همراه با برابری نظریه مجموعه‌ای

$$A\backslash B = A \cap \complement B = \complement(B \cap \complement A)$$

نتیجه می‌شود. $\square$

مثال. ۸. هر σ-جبر یک جبر است.

۹. برای هر مجموعه‌ی Ω سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A از Ω که متناهی یا هم متناهی (یعنی، دارای مکمل متناهی در Ω) هستند یک جبر است، اما تنها وقتی یک σ-جبر است که Ω متناهی باشد.

۱۰. دستگاه همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی از یک مجموعه‌ی Ω یک حلقه است، اما تنها وقتی یک جبر است که Ω متناهی باشد.

۱۱. کوچکترین حلقه از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، مجموعه‌ی تهی $\emptyset$ است.

تمرین.۱. برای هر دستگاه ξ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، کوچکترین حلقه‌ی $\mathcal{P}(\xi)$ در Ω وجود دارد که شامل ξ است. این حلقه، حلقه‌ی تولید شده به وسیله‌ی ξ نامیده می‌شود. این ادعای وجودی را ثابت کنید. در حالتی که ξ از دو زیرمجموعه‌ی A و B از Ω تشکیل شده است $\mathcal{P}(\xi)$ و $\sigma(\xi)$ را مشخص کنید؛ در این حالت چه وقتی برابری $\mathcal{P}(\xi) = \sigma(\xi)$ برقرار است؛ برای یک ξ دلخواه، چه وقتی این برابری برقرار است؟

۲. برای مجموعه‌های A و B، مجموعه‌ی زیر تفاضل متقارن آنها نامیده می‌شود

$$A \triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

ثابت کنید که تفاضل متقارن از قواعد محاسباتی زیر (که در آن A، B و C مجموعه‌هایی دلخواه هستند) پیروی می کند

(الف) $$A \triangle B = B \triangle A;$$

(ب) $$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$

(ج) $$A \triangle A = \emptyset; \quad A \triangle \emptyset = A;$$

(د) $$\complement A \triangle \complement B = A \triangle B;$$

(ه) $$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C);$$

(و) $$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \triangle B_n)$$

(برای دنباله‌های دلخواه (A_n) و (B_n) از مجموعه‌ها). **۳.** از تمرین ۲ نتیجه بگیرید که زیرمجموعه‌ی $\mathcal{R}$ از $\rho(\Omega)$ یک حلقه در مجموعه‌ی Ω است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}$ نسبت به عمل $\triangle$ (به عنوان جمع) و $\cap$ (به عنوان ضرب) یک حلقه‌ی جابه جایی، به مفهوم مورد استفاده‌ی جبردانان، تشکیل بدهد.

۴. یک زیرمجموعه‌ی $\mathcal{N}$ از حلقه‌ی $\mathcal{R}$ در مجموعه‌ی Ω یک ایدال نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر را برآورده کند:

(الف) $$\emptyset \in \mathcal{N};$$

(ب) $$N \in \mathcal{N}, M \in \mathcal{R}, M \subseteq N \;\Rightarrow\; M \in \mathcal{N};$$

(ج) $$M, N \in \mathcal{N} \;\Rightarrow\; M \cup N \in \mathcal{N}.$$

در ادامه ی تمرین ۳ نشان دهید زیرمجموعه‌ی $\mathcal{N}$ از $\mathcal{R}$ یک ایدال در $\mathcal{R}$ است اگر و فقط اگر یک ایدال به مفهوم جبردانان در حلقه‌ی جابجایی $\mathcal{R}$ باشد. هر ایدال در $\mathcal{R}$ یک حلقه در $\mathcal{R}$ است.

۵. فرض کنیم $\Omega := \mathbb{N}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{A}_n$ نشان دهنده‌ی σ-جبر در Ω تولید شده به وسیله‌ی سامانه‌ی σ_n شامل تک عنصری‌های $\{۱\}, \{۲\}, ..., \{n\}$ باشد. نشان دهید $\mathcal{A}_n$ از همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω شامل $\{۱, ۲, ..., n\}$ و یا شامل مکمل این مجموعه، تشکیل می‌شود. واضح است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+۱}$. چرا با این وجود، $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ یک σ-جبر در $\Omega = \mathbb{N}$ نیست؟

[راهنمایی: در حالت کلی برای هر دنباله‌ی صعودی $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از حلقه‌ها در یک مجموعه‌ی Ω، اجتماع $\mathcal{R}_n$ها شامل یک σ-جبر است اگر و تنها اگر از یک اندیس به بعد با هم برابر باشند. به اوردیک، سیمونز و سیمن [۱۹۷۹] و برای حالت خاص σ-جبرها، به بروتن و هاف [۱۹۷۷] رجوع کنید.]

بخش ۲ دستگاه‌های دینکین

بیشتر اوقات تشخیص مستقیم σ-جبر بودن یک سامانه ی داده شده از مجموعه‌ها، دشوار است. مفهوم زیر، که به دینکین [۱۹۶۱] و البته پیش از آن به سرپینسکی [۱۹۲۸] برمی گردد، به عبور از برخی از این دشواری‌ها کمک می کند.

۱.۲ تعریف. یک سامانه ی $\mathcal{D}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه ی Ω سامانه دینکین (در Ω) نامیده می شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\Omega \in \mathcal{D}; \tag{۱.۲}$$

$$D \in \mathcal{D} \ \Rightarrow\ \complement D \in \mathcal{D}; \tag{۲.۲}$$

$$D_n \in \mathcal{D} \ \Rightarrow\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D} \quad \text{دو دوبه مجزا برای } n \in \mathbb{N} \tag{۳.۲}$$

بنابراین هر سامانه ی دینکین $\mathcal{D}$ شامل مجموعه ی تهی $\complement\Omega = \emptyset$ است، و از آنجا (۳.۲) تضمین می کند که $\mathcal{D}$ شامل اجتماع هر گردایه ی دو به دو مجزای متناهی از مجموعه‌های خود است.

مثال. ۱. هر σ-جبر بوضوح یک سامانه ی دینکین است.
۲. فرض کنیم Ω یک مجموعه ی متناهی با تعداد زوج $۲n$ عنصر باشد ($n \in \mathbb{N}$). در این صورت سامانه ی $\mathcal{D}$ از تمام زیرمجموعه‌های D از Ω شامل تعدادی زوج عنصر یک سامانه ی دینکین است. در حالتی که $n > ۱$، $\mathcal{D}$ جبر نیست؛ بنابراین مشخصاً یک σ-جبر نیز نیست.

ارتباط دقیق بین مفاهیم σ-جبر و سامانه دینکین در ملاحظات زیر آشکار می شود.

۲.۲ لم. هر سامانه ی دینکن $\mathcal{D}$ نسبت به تشکیل مکمل سره بسته است؛ بدین معنی که

$$D, E \in \mathcal{D},\ D \subseteq E \ \Rightarrow\ E\backslash D \in \mathcal{D}. \tag{۴.۲}$$

اثبات. بنا بر آنچه بعد از تعریف ۱.۲ خاطر نشان شد، مجموعه $D \cup \complement E$، به عنوان اجتماع مجموعه‌های مجزای D و $\complement E$ از $\mathcal{D}$، در $\mathcal{D}$ قرار دارد. اما در این صورت مکمل این مجموعه نسبت به Ω، یعنی $E \cap \complement D = E\backslash D$، در $\mathcal{D}$ قرار دارد. □

نتیجه آنکه، سامانه‌های دینکین با ویژگی‌های (۱.۲)، (۴.۲) و (۳.۲) نیز می توانند تعریف شوند.

۳.۲ قضیه. یک سامانه ی دینکین، دقیقاً هنگامی σ-جبر است که شامل اشتراک هر دو مجموعه اش باشد.

اثبات. باید نشان دهیم که هر سامانه ی دینکین بسته تحت اشتراک متناهی مانند $\mathcal{D}$، یک σ–جبر است. از ویژگی‌های معرف یک σ–جبر، تنها (۳.۱) باید تصدیق شود و لذا آن را انجام می دهیم طبق (۴.۲) و فرضیه پیوستار، $A\backslash B = A\backslash(A\cap B)$ در $\mathcal{D}$ قرار دارد هرگاه $A, B \in \mathcal{D}$. چون $(A\backslash B)\cap B = \emptyset$ و $A\cup B = (A\backslash B)\cup B$، $\mathcal{D}$ شامل اجتماع هر دو است؛ بنابراین اجتماع هر تعداد متناهی از عناصرش را نیز شامل می شود. برای هر دنباله $(D_n)_n \in \mathbb{N}$ در $\mathcal{D}$، داریم

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}(D'_{n+1}\backslash D'_n)$$

که در آن $D'_0 := \emptyset$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $D'_n := D_1 \cup ... \cup D_n$. مجموعه‌های $D'_{n+1}\backslash D'_n$ دو به دو مجزایند و بنا به آنچه هم اکنون ثابت شده است، آنها در $\mathcal{D}$ قرار دارند. از اینرو بنا بر (۳.۲)، اجتماع مجموعه‌های D_n در $\mathcal{D}$ قرار دارد. □

همانند σ–جبرها، جبرها و حلقه‌ها، هر سامانه ی $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های Ω در یک کوچکترین سامانه ی دینکین قرار می گیرد که، البته، سامانه دینکین تولیدشده توسط $\mathcal{E}$ نامیده و با $\delta(\mathcal{E})$ نشان داده می شود.
اهمیت سامانه‌های دینکین پیش از هر چیز در واقعیت زیر نهفته است.

۴.۲ قضیه. هر زیرمجموعه‌ی بسته تحت اشتراک متناهی $\mathcal{E}$ از $\mathcal{P}(\Omega)$ شرط زیر را برآورده می کند

$$\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) \tag{۵.۲}$$

اثبات. چون هر σ–جبر یک سامانه‌ی دینکین است، $\sigma(\mathcal{E})$ یک سامانه‌ی دینکین شامل $\mathcal{E}$ است و در نتیجه $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma\delta(\mathcal{E})$. اگر برعکس، می‌دانستیم $\delta(\mathcal{E})$ یک σ–جبر است، رابطه‌ی دوگان $\sigma\delta(\mathcal{E}) \subseteq \delta(\mathcal{E})$ نیز نتیجه می‌شد. لذا بنا بر ۳.۲، کافی است نشان دهیم که $\delta(\mathcal{E})$ تحت اشتراک بسته است. برای اثبات این ویژگی، برای هر $D \in \delta(\mathcal{E})$، سامانه‌ی زیر را معرفی می کنیم

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) \ : \ Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

بررسی ساده‌ای تصدیق می کند که $\mathcal{D}_D$ یک سامانه دینکین است. برای هر $E \in \mathcal{E}$، مفروضات روی $\mathcal{E}$ تضمین می کند که $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ و از آنجا $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$.بنابراین برای هر $D \in \delta(\mathcal{E})$ و هر $E \in \mathcal{E}$ داریم $E \cap D \in \delta(\mathcal{E})$؛ یعنی، $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$، و در نتیجه $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$.اما این دقیقا همان ویژگی $\delta(\mathcal{E})$ است که باید تصدیق می‌شد. □

از این پس، سامانه‌های زیرمجموعه‌هایی که تحت اشتراک (به ترتیب، اجتماع) دو، و لذا هر تعداد متناهی، از مجموعه‌های خود بسته هستند، با عنوان $\cap$–پایا (به ترتیب، $\cup$–پایا) توصیف خواهند شد. **تمرین.** سامانه‌ی دینکین تولید شده توسط سامانه‌ی متشکل از تنها دو زیرمجموعه‌ی A و B از Ω را مشخص کنید. نشان دهید که $\delta(\mathcal{E})$ و $\sigma(\mathcal{E})$ بر هم منطبق می‌شوند صرفاً در حالتی که یکی از مجموعه‌های $A \cap B$، $A \cap \complement B$، $\complement A \cap B$ یا $\complement A \cap \complement B$ تهی باشد.

فصل دوم

نظریه‌ی انتگرال‌گیری

فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ داده شده است. در اینجا مساله‌ی اختصاص یک انتگرال به هر تابع روی Ω از یک رده‌ی در حد امکان بزرگ را مطرح می‌کنیم؛ یعنی، اختصاص یک «مقدار میانگین» ساخته شده نسبت به μ. بعد از مقدمه‌ی بخش ۹ درباره‌ی ویژگی اساسی اندازه‌پذیری، این مساله، گام به گام در بخش‌های ۱۰ تا ۱۲ حل خواهد شد. بخش‌های آخر این فصل به بنای این نظریه و کشف کاربردهای فرآیند انتگرال‌گیری بدینسان تعریف شده، اختصاص یافته است.

بخش۹ توابع عددی اندازه‌پذیر

روی خط حقیقی $\mathbb{R}$، σ- جبر $\mathcal{B}^1$ از مجموعه‌های بورل را تعریف کرده‌ایم. هرگاه $\mathbb{R}$ را به روش معمولی با اضافه کردن نقاط «ایدال» $-\infty$ و $+\infty$ به $\overline{\mathbb{R}}$ فشرده کنیم، زیرمجموعه‌های A از $\overline{\mathbb{R}}$ با شرط $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1$، بورل در $\overline{\mathbb{R}}$ نامیده می‌شوند. در حقیقت، مجموعه‌های بورل در $\overline{\mathbb{R}}$ دقیقا همه‌ی مجموعه‌های B، $B \cup \{-\infty\}$، $B \cup \{+\infty\}$ و $B \cup \{-\infty, +\infty\}$ با شرط $B \in \mathcal{B}^1$ هستند. سامانه‌ی $\overline{\mathcal{B}}^1$ متشکل از این مجموعه‌ها بوضوح یک σ- جبر در $\overline{\mathbb{R}}$ است که رد (اثر) آن در $\mathbb{R}$ همان $\mathcal{B}^1$ است؛ یعنی،

$$\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1. \tag{۱.۹}$$

حال اگر $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه باشد، $\mathcal{A}$- $\overline{\mathcal{B}}^1$- اندازه پذیری توابع $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ تعریف می‌شود. از این پس چنین توابعی، توابع عددی $(\mathcal{A})$- اندازه‌پذیر روی Ω نامیده خواهند شد. به خصوص توابع حقیقی $f : \Omega \to \mathbb{R}$، توابع عددی خاصی هستند؛ با توجه به (۱.۹)، $\mathcal{A}$- $\overline{\mathcal{B}}^1$- اندازه‌پذیری این تابع دقیقا همان $\mathcal{A}$- $\mathcal{B}^1$- اندازه پذیری است.

مثال. ۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mathcal{A}$ یک زیرمجموعه‌ی Ω باشد. تابع تابع شاخص (همچنین گاهی تابع مشخصه‌ی) A نامیده می‌شود.