



به نام او، برای او

یافتن الگوریتمی برای محاسبه‌ی هال بازه‌ای مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت

استاد راهنما: طاهر لطفی

استاد مشاور: فریبا فتاح‌زاده

دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان

۲۴ دی ۱۳۹۰

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
هال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
طاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



رؤوس مطالب

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

۱ محاسبات بازه‌ای

۲ چکیده

۳ قضایای اصلی

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
هال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
طاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

از آنجا که بازه‌ها در واقع از تقریب زدن‌ها ناشی می‌شوند، در نظر گرفتن مقادیر واقعی درون بازه‌هایی کم‌پهنا و شامل آن‌ها، به منظور کاهش حد وسیعی از خطاهای محاسباتی کاملاً منطقی به نظر می‌رسد. از جمله‌ی این موارد عبارتند از:

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



قضیه‌ی مقدار میانگین

اگر f تابعی بصورت پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه به ازای هر $x \neq y$ و $\xi \in [x, y]$ داریم

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$

و همچنین

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi),$$

که در آن، $\xi \in [a, b]$.

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

قضیه مقدار میانگین



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادی
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

اگر f تابعی بصورت پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه تقریب
این تابع با استفاده از سری تیلور بصورت

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

می‌باشد که

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

جمله‌ی خطا است و $\xi \in [x_0, x]$.



پیشینه‌ی خارجی تحقیق

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
طاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

نمونه‌ای از برجسته‌ترین تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی
محاسبات بازه‌ای به شرح زیر است:

- مور در سال ۱۹۶۲، برای اولین بار محاسبات بازه‌ای را معرفی نمود.



پیشینه‌ی خارجی تحقیق

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
طاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

نمونه‌ای از برجسته‌ترین تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی
محاسبات بازه‌ای به شرح زیر است:

- مور در سال ۱۹۶۲، برای اولین بار محاسبات بازه‌ای را معرفی نمود.
- اوتلی و پراگر در سال ۱۹۶۴، برای اولین بار معادلات خطی بازه‌ای را بررسی کردند.



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
هال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

■ جانسون در سال ۱۹۹۷، برای اولین بار نظریه‌ی بررسی
مجموعه جواب با استفاده از ویژگی ناتهی بودن اشتراک
را مطرح کرد.

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

پیشینه‌ی خارجی تحقیق



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

■ جانسون در سال ۱۹۹۷، برای اولین بار نظریه‌ی بررسی مجموعه جواب با استفاده از ویژگی ناتهی بودن اشتراک را مطرح کرد.

■ رون در سال ۲۰۱۱، برای اولین بار کران‌های بسیار دقیقی برای مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی بازه‌ای بدست آورد.

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



پیشینه‌ی داخلی تحقیق

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:

ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

جدیدترین پژوهش‌های داخلی در زمینه‌ی محاسبات بازه‌ای،
طی سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۲، عبارتند از:
■ معکوس ماتریس‌های بازه‌ای؛

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



پیشینه‌ی داخلی تحقیق

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
هال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:

ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

جدیدترین پژوهش‌های داخلی در زمینه‌ی محاسبات بازه‌ای،
طی سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۲، عبارتند از:

■ معکوس ماتریس‌های بازه‌ای؛

■ نرم ماتریس‌های بازه‌ای؛

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



پیشینه‌ی داخلی تحقیق

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
مال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:

طاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

جدیدترین پژوهش‌های داخلی در زمینه‌ی محاسبات بازه‌ای،
طی سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۲، عبارتند از:

- معکوس ماتریس‌های بازه‌ای؛
- نرم ماتریس‌های بازه‌ای؛
- شرط کافی نامنفرد بودن ماتریس‌های بازه‌ای؛

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

■ نامنفرد بودن و معین مثبت بودن ماتریس‌های بازه‌ای؛

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

- نامنفرد بودن و معین مثبت بودن ماتریس‌های بازه‌ای؛
- روش تکراری حل معادلات قدرمطلق؛

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

- نامنفرد بودن و معین مثبت بودن ماتریس‌های بازه‌ای؛
- روش تکراری حل معادلات قدرمطلق؛
- شرط لازم تکراری و کافی نامنفرد بودن ماتریس‌های بازه‌ای؛

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



چکیده

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
هال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

در این پایان‌نامه، الگوریتمی که برای هر ماتریس بازه‌ای $n \times n$ مانند \mathbf{A} و هر بردار بازه‌ای n تایی مانند \mathbf{b} ، با تعداد تکرارهای از پیش تعیین نشده و تعداد گام‌های متناهی، هال بازه‌ای مجموعه جواب یک دستگاه معادلات خطی بازه‌ای به شکل $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ، یا یک ماتریس منفرد $S \in \mathbf{A}$ را نتیجه می‌دهد، مورد بررسی قرار می‌گیرد.



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

مساله‌ی حل دستگاه معادلات خطی بازه‌ای هنگامی که دستگاه‌های جبری مقدماتی را در ابعاد بالاتر در نظر بگیریم، پر اهمیت‌تر و دشوارتر جلوه می‌کند. لذا برای حل این دستگاه لازم است که الگوریتم‌های کارایی ابداع گردند، یعنی الگوریتم‌هایی که زمان معقولی برای اجرای آن‌ها صرف گردد و حافظه‌ی زیادی از کامپیوتر را اشغال نکنند.



قضیه ۱

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

قضیه

اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^m$ ، آنگاه $x \in \mathbb{R}^n$ یک جواب
ضعیف دستگاه $Ax = b$ می‌باشد اگر و تنها اگر در شرط

$$|A_c x - b_c| \leq \Delta |x| + \delta$$

صدق کند.



قضیه

دستگاه $Ax = b$ حل پذیر قوی است اگر و تنها اگر برای هر $y \in Y_m$ ، دستگاه

$$A_{ye}x^1 - A_{-ye}x^2 = b_y,$$

$$x^1 \geq 0, x^2 \geq 0$$

دارای یک جواب x_y^1, x_y^2 باشد. بعلاوه، در این حالت، به ازای هر $A \in \mathbf{A}$ و $b \in \mathbf{b}$ ، دستگاه $Ax = b$ ، یک جواب در $\text{Conv}\{x_y^1 - x_y^2 \mid y \in Y_m\}$ دارد.

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاحزاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

قضیه

فرض کنید که A یک ماتریس بازه‌ای نامنفرد و b یک بردار بازه‌ای n تایی باشد. آنگاه به ازای هر $y \in Y_n$ ، معادله‌ی

$$A_c x - T_y \Delta |x| = b_y \quad (۱)$$

دارای یک جواب یکتای x_y ، متعلق به X می‌باشد و داریم

$$\text{Conv } X = \text{Conv} \{ x_y \mid y \in Y_n \}. \quad (۲)$$



نتیجه‌ی قضیه‌ی ۲

نتیجه

دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ با ماتریس مربعی \mathbf{A} را در نظر بگیرید. آنگاه برای محاسبه‌ی هال بازه‌ای مجموعه‌ی \mathbf{X} داریم

$$\underline{x} = \min_{y \in Y_n} x_y$$

و همچنین

$$\bar{x} = \max_{y \in Y_n} x_y,$$

که در آن به ازای هر $y \in Y_n$ ، $x_y \in \mathbf{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ از معادله‌ی (۱) بدست می‌آید و در رابطه‌ی (۲) صدق می‌کند.

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
هال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی



ویژگی‌های توپولوژیکی X

قضیه

اگر $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نامنفرد باشد، آنگاه به ازای هر $b \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه جواب دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $Ax = b$ یعنی، $X(A, b)$ ، فشرده، بسته و کراندار، و همبند است؛ همچنین اگر A منفرد باشد $X(A, b)$ بی‌کران می‌شود.

قضیه

دستگاه معادلات خطی بازه‌ای $Ax = b$ ، با $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. اگر A منفرد باشد، آنگاه مجموعه جواب دستگاه $X(A, b)$ بی‌کران می‌باشد و در حالت کلی نامحدب است.

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

ویژگی‌های توپولوژیکی X



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

قضیه

فرض کنید که $A = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ یک ماتریس
بازه‌ای $n \times n$ ، b یک بردار بازه‌ای n تایی و Z زیر
مجموعه‌ای از Y_n باشد که دارای ویژگی‌های زیر است:

ویژگی‌های توپولوژیکی X



یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

قضیه

فرض کنید که $A = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ یک ماتریس
بازه‌ای $n \times n$ ، b یک بردار بازه‌ای n تایی و Z زیر
مجموعه‌ای از Y_n باشد که دارای ویژگی‌های زیر است:
■ برای برخی $x_0 \in X(A, b)$ داشته باشیم

$$\text{sgn}(x_0) \in Z$$

ویژگی‌های توپولوژیکی X



قضیه

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

ویژگی‌های توپولوژیکی X



قضیه

■ به ازای هر $z \in Z$ ، معادلات

$$QA_c - |Q|\Delta T_z = I, \quad QA_c - |Q|\Delta T_{-z} = I$$

به ترتیب دارای جواب‌های ماتریسی Q_z و Q_{-z} باشند
و داشته باشیم

$$\bar{x}_z = Q_z b_c + |Q_z| \delta, \quad \underline{x}_z = Q_{-z} b_c - |Q_{-z}| \delta,$$

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاحزاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی

ویژگی های توپولوژیکی X



قضیه

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه
حال بازه ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه ای

رعنا فرهاد صفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح زاده

محاسبات
بازه ای

چکیده

قضایای
اصلی



ویژگی‌های توپولوژیکی X

قضیه

■ اگر $\underline{x}_z \leq \bar{x}_z$ ، $z \in Z$ و برای برخی از z ها داشته باشیم

که \bullet $(\underline{x}_z)_j (\bar{x}_z)_j \leq 0$ ، آنگاه $z - \sum z_j e_j \in Z$.

آنگاه A نامنفرد است و داریم

$$x(A, b) = [\min_{z \in Z_1} \underline{x}_z, \max_{z \in Z_1} \bar{x}_z]$$

که در آن

$$Z_1 = \{z \in Z \mid \underline{x}_z \leq \bar{x}_z\}.$$

یافتن الگوریتمی
برای محاسبه‌ی
حال بازه‌ای
مجموعه جواب
دستگاه معادلات
خطی بازه‌ای

رعنا فرهادصفت
استاد راهنما:
ظاهر لطفی
استاد مشاور: فریبا
فتاح‌زاده

محاسبات
بازه‌ای

چکیده

قضایای
اصلی