مقدمه

متن مقدمه را اینجا می‌نویسم. متن مقدمه را اینجا می‌نویسم. متن مقدمه را اینجا می‌نویسم. متن مقدمه را اینجا می‌نویسم. متن مقدمه را اینجا می‌نویسم. متن مقدمه را اینجا می‌نویسم.

چکیده

متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم. متن چکیده را اینجا می‌نویسم.

فهرست مطالب

فصل اول

نظریه‌ی اندازه

در هندسه‌ی مقدماتی، به زیرمجموعه‌های ساده‌ی هندسی خط، صفحه، و فضای سه‌بعدی، «اندازه‌هایی عددی» به نام طول، مساحت و حجم اختصاص داده می‌شود. آنچه در ابتدا به طور شهودی بدیهی است این است که طول یک پاره خط، مساحت یک مستطیل و حجم یک مکعب، چطور باید تعریف شود. با عبور از این مرحله، با استفاده از روش‌های هندسه‌ی مقدماتی، طول، مساحت، و حجم مجموعه‌های پیچیده‌تری را می‌توانیم مشخص کنیم در صورتی که قواعد محاسباتی مشخصی را برای کار با این اندازه‌های عددی بپذیریم.

بخش۱ σ - جبرها و مولدهای آنها

فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعه‌ی توانی آن، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω، را نشان دهد. در این صورت همراه با هر خانواده‌ی $(A_i)_{i\in I}$ از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{P}(\Omega)$، اجتماع $\bigcup_{i\in I} A_i$ و اشتراک $\bigcap_{i\in I} A_i$ نیز متعلق به $\mathcal{P}(\Omega)$ هستند. به علاوه $\mathcal{P}(\Omega)$ شامل مکمل $\complement A$ از هر مجموعه‌ی A در خودش است.

در ادامه به مطالعه‌ی زیرسامانه‌های $\mathcal{A}$ از $\mathcal{P}(\Omega)$ می‌پردازیم که خواصی مشابه با $\mathcal{P}(\Omega)$، حداقل برای مجموعه‌ی زیرنویس‌های شمارای I دارند؛ طبق قراردادهای ذکر شده در مقدمه، مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌هایی هستند که متناهی یا شمارای نامتناهی‌اند.

۱.۱ تعریف. یک سامانه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی Ω، یک σ- جبر (در Ω) نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\Omega \in \mathcal{A}, \tag{۱.۱}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{A}, \tag{۲.۱}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \tag{۳.۱}$$

مثال.۱. $\mathcal{P}(\Omega)$ همواره یک σ- جبر است.

۲. برای هر مجموعه‌ی Ω، سامانه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های آن که شمارا یا هم‌شمارا هستند (یعنی، زیرمجموعه‌های A از Ω به طوری که A یا $\complement A$ شمارا باشد) یک σ-جبر تشکیل می‌دهد. ویژگي (۳.۱) به صورت زیر ثابت می‌شود. اگر هر A_n شمارا باشد، آن گاه اجتماع $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ نیز همین طور است. اگر A_n وجود داشته باشد که شمارا نباشد، آن گاه مکمل آن شمارا است، و مجموعه‌ی $\complement \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n$ نیز به عنوان زیرمجموعه‌ی $\complement A_n$ شمارا است.

۳. اگر $\mathcal{A}$ یک σ- جبر در مجموعه‌ای مانند Ω و Ω' زیرمجموعه‌ای از Ω باشد، آن‌گاه

$$\mathcal{A}_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' : A \in \mathcal{A}\} \tag{۴.۱}$$

معروف به اثر $\mathcal{A}$ در Ω'، یک σ-جبر در Ω' است. در حالتی که $\Omega' \in \mathcal{A}$، نماد $\mathcal{A}_{\Omega'}$ به طور ساده، همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω' متعلق به $\mathcal{A}$ را نشان می‌دهد.

۴. فرض کنیم Ω و Ω' دو مجموعه، $\mathcal{A}'$ یک σ-جبر در Ω' و $T : \Omega \to \Omega'$ یک نگاشت باشد. در این صورت بنابر ویژگی‌های آشنای عمل‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها، تحت تصویر وارون، سامانه‌ی متشکل از مجموعه‌های زیر یک σ- جبر است

$$T^{-۱}(\mathcal{A}) := \{T^{-۱}(A') : A' \in \mathcal{A}\}. \tag{۵.۱}$$

هر σ- جبر $\mathcal{A}$ دارای ویژگی‌های «دوگان» برای (۱.۱) و (۳.۱) است؛ یعنی،

$$\emptyset \in \mathcal{A}, \tag{۶.۱}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \;\; \Rightarrow \;\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \tag{۷.۱}$$

که این ویژگی‌ها از (۱.۱)-(۳.۱) و برابری‌های $\emptyset = \complement\Omega$ و $\bigcap A_n = \complement(\bigcup \complement A_n)$ به دست می‌آیند. به علاوه

$$A_۱ \cup ... \cup A_n = A_۱ \cup ... \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup ...$$

$$A_۱ \cap ... \cap A_n = A_۱ \cap ... \cap A_n \cap \Omega \cap \Omega \cap ...$$

بنابراین $\mathcal{A}$ شامل اجتماع و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های متعلق به خودش نیز هست. همچنین از این مشاهدات و (۲.۱) داریم

$$A, B \in \mathcal{A} \;\; \Rightarrow \;\; A \backslash B = A \cap \complement B \in \mathcal{A}. \tag{۸.۱}$$

برای ساخت σ-جبرها، قضیه‌ی زیر از اهمیت خاصی برخوردار است.

۲.۱ قضیه. *اشتراک $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ از هر خانواده‌ی $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ از σ- جبرها در یک مجموعه‌ی یکسان Ω، یک σ- جبر در Ω است.*

اثبات. این قضیه، تنها یک بررسی ساده‌ی ویژگی‌های (۱.۱)-(۳.۱) می‌باشد. در نتیجه، برای هر دستگاه $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های Ω کوچکترین σ- جبر $\sigma(\mathcal{E})$ شامل $\mathcal{E}$ وجود دارد؛ یعنی، $\sigma(\mathcal{E})$ یک σ- جبر در Ω با ویژگی‌های زیر است

(۱) $\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{E})$،

(۲) برای هر σ- جبر $\mathcal{A}$ در Ω با شرط $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{A}$ داریم $\sigma(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{A}$.

برای اثبات این واقعیت، فرض کنیم Σ سامانه‌ی همه‌ی σ- جبرهای $\mathcal{A}$ در Ω با شرط $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{A}$ باشد؛ برای مثال، $\mathcal{P}(\Omega)$ یک عضو از Σ است. در این صورت $\sigma(\mathcal{E})$ اشتراک همه‌ی عناصر $\mathcal{A}\in\Sigma$ است که طبق ۲.۱، دارای همه ی ویژگی‌های مطلوب است.

$\sigma(\mathcal{E})$، *σ- جبر تولید شده به وسیله‌ی* $\mathcal{E}$ (در Ω) و $\mathcal{E}$ *مولد* $\sigma(\mathcal{E})$ نامیده می‌شود.

بخش۲ سامانه‌های دینکین

بیشتر اوقات تشخیص مستقیم σ-جبر بودن یک سامانه‌ی داده شده از مجموعه‌ها، دشوار است. مفهوم زیر، که به دینکین [۱۹۶۱] و البته پیش از آن به سرپینسکی [۱۹۲۸] برمی‌گردد، به عبور از برخی از این دشواری‌ها کمک می‌کند.

۱.۲ تعریف. یک سامانه‌ی $\mathcal{D}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی Ω *سامانه‌ی دینکین* (در Ω) نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$\Omega\in\mathcal{D}, \tag{۱.۲}$$

$$D\in\mathcal{D} \;\Rightarrow\; \complement D\in\mathcal{D}, \tag{۲.۲}$$

$$\text{دو به دو مجزا برای } n\in\mathbb{N} \quad D_n\in\mathcal{D} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\in\mathcal{D}. \tag{۳.۲}$$

بنابراین هر سامانه‌ی دینکین $\mathcal{D}$ شامل مجموعه‌ی تهی $\complement\Omega=\emptyset$ است، و از آنجا (۳.۲) تضمین می‌کند که $\mathcal{D}$ شامل اجتماع هر گردایه‌ی دو به دو مجزای متناهی از مجموعه‌های خود است.

مثال. ۱. هر σ-جبر بوضوح یک سامانه‌ی دینکین است.