بسم الله الرحمن الرحیم

موجک‌های قاب (پارسوال) با اتساعات $\mathbf{E}_\mathrm{n}^2$

طاهره عرفانی گلکار

دانشگاه آزاد اسلامی

شهریور ۰۹۳۱

فهرست

چکیده

به طور خلاصه هدف نظریه موجک‌ها بازسازی مجدد هر تابع دلخواه f با استفاده از توابع ساده‌تر، در یک بازه T می‌باشد، به طوری‌که هرگاه بخواهیم f را در مقیاس‌ها یا انتقال‌های مختلف بازه T بازسازی کنیم، مجددا همان توابع ساده اولیه جوابگوی نیاز ما باشند. همین مسأله باعث کاربرد زیاد موجک‌ها در شاخه‌های مختلف مهندسی، فیزیک و ریاضیات کاربردی شده است. به عنوان مثال از موجک‌ها در پردازش سیگنال‌ها، فشرده‌سازی تصاویر، مکانیک کوانتوم، کنترل بهینه، آنالیز عددی و ... استفاده می‌شود.
در ریاضیات محض، مبنا و پایه نظریه موجک‌ها به بحث سری‌های فوریه و تبدیلات فوریه برمی‌گردد.

پیش گفتار

در این پایان‌نامه به طور گذرا به نوع خاصی از موجک‌ها، موجک‌های قاب پارسوال با اتساعات E_n^2- می‌پردازیم. و موجک‌های-دوتایی قاب پارسوال A-چندریزگی را معرفی نموده و نشان می‌دهیم که همه A-چندریزگی‌ها موجک-دوتایی قاب پارسوال می‌پذیرند و کلاس جدیدی از موجک‌های (دوتایی) قاب پارسوال را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مجموعه همه موجک‌های قاب پارسوال چندریزگی مشمول در مجموعه موجک‌های قاب پارسوال القاء شده توسط پالایه است و با استفاده از یک پالایه پایین‌گذر تعمیم یافته دلخواه، یک $A-$چندریزگی (V_j) پیدا می‌کنیم و در انتها، روش ساخت موجک‌های (دوتایی) قاب پارسوال القاء شده توسط پالایه است.

تعریف ۱.۱.
فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ آن‌گاه تابع $\hat{f}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x,w \rangle} f(x)dx \qquad (۱)$$

که به آن تبدیل فوریه تابع f گوییم و در آن $< x, w >$ نمایانگر ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۲.۱.
اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ آن‌گاه $\lim_{|w|\to\infty} |\hat{f}(w)| = ۰$.

قضیه ۳.۱.

فرض کنید $f,g,\hat{f},\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ در این صورت

آ. فرمول پلانچرال $\langle f,g\rangle = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle$.

ب. فرمول پارسوال $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

بنابراین تبدیل فوریه از $L^1(\mathbb{R}^n)$ به $L^2(\mathbb{R}^n)$ توسیع می‌یابد.

آنالیز فوریه
خواص تبدیل فوریه در $L^2(\mathbb{R}^n)$

در این پایان‌نامه منظور از $\mathbb{T}^n$ یک چنبره $n-$ بعدی است. که $L^p(\mathbb{T}^n)$ فضای تمام توابع $\mathbb{Z}^n-$ تناوبی است(یعنی f در هر متغیر، ۱− تناوبی است) که $\int_{\mathbb{T}^n}|f(x)|^p dx < \infty$. و مکعب واحد استاندارد $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})^n$ در $\mathbb{R}^n$ را با C نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.

اگر $f,g \in L^2(\mathbb{R}^n)$، تابع $[f,g]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[f,g]_{(x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k)\overline{g(x+k)},$$

که اگر $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ آن‌گاه $[\hat{f},\hat{f}]$ را با نماد σ_f نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۵.
اگر $f,g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ آن‌گاه $[f,g] \in L^1(\mathbb{T}^n)$.

لم ۱.۶.
برای هر $f,g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ داریم

$$\langle f,g\rangle = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} [\hat{f},\hat{g}]_{(x)}dx \qquad (۲)$$

تعریف ۱.۷.
اگر $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$، فضای انتقال پایای اساسی که به وسیله φ تولید می‌شود را با $\langle\varphi\rangle$ نمایش می‌دهیم که $\langle\varphi\rangle = \overline{\mathrm{span}}\{T_k\varphi; k \in \mathbb{Z}^n\}$ و Ω_φ یک زیرمجموعه $\mathbb{Z}^n$–انتقال پایا از $\mathbb{R}^n$ است که

$$\Omega_\varphi = supp\sigma_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n; \hat{\varphi}(x+k) \neq 0 \text{ که به قسمی } k \in \mathbb{Z}^n \text{ وجود دارد}\}$$

موجک‌های قاب پارسوال
با اتساعات $\mathbf{E}^2_{\mathrm{n}}$

طاهره عرفانی گلکار

آنالیز فوریه
تبدیل فوریه
خواص تبدیل فوریه در $L^2(\mathbb{R}^n)$

آنالیز چندریزگی
موجک‌های قاب پاسوال

در این پایان‌نامه A را عضوی از E_n^2 در نظر می‌گیریم یعنی A یک ماتریس توسیع (ماتریسی که قدرمطلق مقدار ویژه آن بزرگتر از یک است) با درایه‌های صحیح و $|detA| = ۲$ است. $B = A^t$ که B ترانهاده A است و واضح است که $B \in E_n^2$ و $\alpha \in \mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n, \beta = B^{-1}\alpha$ و ماتریس $Q = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس خاصی است که در $\mathbb{R}^2$ واقع شده و به صورت دوران $\frac{\pi}{4}$ و اتساعات $\sqrt{2}$ است.

لم ۱.۸.

فرض کنید $B \in M_n(\mathbb{Z})$ یک ماتریس توسیع باشد آن‌گاه

آ. $j_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی‌که برای هر $j \geq j_0$، $B^{-j}C \subseteq C$.

ب. برای هر مجموعه کراندار $K \subset \mathbb{R}^n$، $j_k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $j \geq j_k$، $K \subset B^jC$.

ج. یک همسایگی کراندار باز از صفر وجود دارد که $F \subset BF$.

تعریف ۱.۹.

هر تابع اندازه‌پذیر f که $|f(x)| = ۱ \quad a.e.$ را تابع تک‌مدولی گوییم.

آنالیز چندریزگی

این فصل به ساختار چندریزگی‌ها، موجک‌های قاب پارسوال چندریزگی و موجک‌های-دوتایی قاب پارسوال برای A دلخواه که A عضو E_n^2 اختصاص داده شده است.

آنالیز چندریزگی
موجک‌های قاب پاسوال

عملگر انتقال $L^2(\mathbb{R})^n \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : T_k$ با ضابطه $Tkf = f(x-k)$ و عملگر اتساع $L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) : D = D_A$ که $A \in E_n^2$ با ضابطه؛ $(D_A f)(x) = \sqrt{2} f(Ax)$ تعریف می‌شوند به سادگی می‌توان دید که T_k و D_A عملگرهای یکانی هستند. حال برای $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ دستگاه آفین $\Psi = \{\psi_{j,k} = D^j T_k \psi = ۲^{\frac{j}{2}} \psi(A^j. - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\}$ را در نظر بگیرید.