International Zhautykov Olympiad
سال ۲۰۱۲

روز اول

۱ـ مثلث $\triangle ABC$ مثلثی حاده الزاویه است. فرض کنید D نقطه ای روی پاره خط AB باشد. فرض کنید M و N به ترتیب پای عمود وارد از D بر BC و AC باشد. فرض کنید H_1 و H_2 به ترتیب مراکز ارتفاعیه مثلث های $\triangle MNC$ و $\triangle MND$ باشد. ثابت کنید مساحت چهارضلعی AH_1BH_2 به محل قرار گرفتن D رو AB ندارد.

۲ـ مجموعه ای از مربع های واحد از مربع $n \times n$ را ساده گوییم هرگاه هر سطر و هر ستون از جدول دارای حداقل دو مربع از مجموعه باشد. برای هر $n \geq 5$، حداکثر مقدار m را بیابید به نحوی که یک مجموعه ی ساده با m مربع وجود داشته باشد که با حذف هر مربع از مجموعه، مجموعه دیگر ساده نباشد.

۳ـ فرض کنید P، Q و R سه چندجمله ای با ضرایب حقیقی باشند به نحوی که برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$P(Q(x)) + P(R(x)) = c$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. ثابت کنید $P(x)$ ثابت است و یا $Q(x) + R(x)$ ثابت است.

روز دوم

۱ـ آیا اعداد صحیح m و n و تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که دو شرط زیر به طور همزمان برقرار باشد.

- برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$.
- $m \leq n$ و $f(m) = n$.

۲ـ مثلث های متساوی الاضلاع $\triangle ACB'$ و $\triangle BDC'$ روی اقطار چهارضلعی محدب $ABCD$ بنا شده است به نحوی که B و B' در یک طرف AC و C و C' در یک طرف BD قرار دارند. اگر $B'C' = AB + CD$، مقدار $\angle BAD + \angle CDA$ را بیابید.

۳ـ همه ی اعداد صحیح را بیابید به نحوی که $2x^2 - y^{14} = 1$.