

فهرست مطالب

۱	لیست تصاویر
۲	۱ معرفی یک مدل ابر-کارایی برای داده های نامنفی
۲	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ حالت نشدنی مدل گسترش یافته لی و چن ولیانگ برای ورودی صفر
۷	۳.۱ مدل زو ولی
۹	۱.۳.۱ مقدار ابر-کارایی مدل زو ولی
۱۲	۲.۳.۱ ماهیت - خروجی مدل زو ولی
۱۴	۴.۱ مثال کاربردی برای معادن حفاری ایلی نويز

لیست تصاویر

۱.۱ شکل مربوط به جدول (۱.۴) ۳

فصل ۱

معرفی یک مدل ابر-کارایی برای داده های نامنفی

۱.۱ مقدمه

در فصل سوم مدل لی [؟] در سال ۲۰۱۱ و مدل کوک [؟] در سال ۲۰۰۹ و تلفیق این دو مدل توسط چن و لیانگ [؟] در سال ۲۰۱۱ برای حالت های نشدنی ابر-کارایی تحت بازده به مقیاس متغیر را بیان کردیم. در این فصل به بررسی مدل های ارائه شده فصل قبل می پردازیم و حالت های نشدنی آن مدلها را بررسی می کنیم و مدلی جدید که همیشه شدنی است را ارائه می دهیم و در آخر یک مثال کاربردی برای مدل بیان می کنیم.

۲.۱ حالت نشدنی مدل گسترش یافته لی و چن ولیانگ برای ورودی صفر

فرض مجموعه ای از n تا DMU ، به صورت زیر داریم.

$$\{DMU_j : j = 1, \dots, n\}$$

که (x_k, y_k) بردار خروجی و ورودی DMU_k معرف می شود و i ام ورودی DMU_k ام به صورت x_{ik} و r ام خروجی DMU_k ام به صورت y_{rk} نوشته می شود.

مدل ابرکارایی بازده به مقیاس متغیر VRS تحت ماهیت - ورودی برای DMU_k کارا به صورت زیر بیان

می شود:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, j \neq k
 \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

برای شروع به مثال عددی زیر توجه کنید.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید ۴ تا DMU داریم که اطلاعات آنها در جدول (۱.۱) ارائه و دارای دو ورودی و یک خروجی می باشد را در نظر بگیرید می خواهیم آن را تحت مدل ابر-کارایی بازده به مقیاس متغیر در ماهیت - ورودی بررسی کنیم.

شکل ۱.۱: شکل مربوط به جدول (۱.۴)

همانطور که ملاحظه می کنید همه DMU ها خروجی یکسانی دارند و DMU ، D را از مجموعه امکان تولید حذف کرده ایم و مرز جدید را که از بقیه DMU ها تشکیل شده را در شکل بالا را مشاهده می کنید که نشان می دهد DMU ، D تحت مدل (۱.۱) نشدنی است زیرا همانطور که در دستگاه زیر مشاهده می گردد قید دوم با قید چهارم و سوم در تناقض می باشد.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta \\
 \text{s.t.} \quad & 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 3\theta \\
 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \leq 0\theta \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1 \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\
 & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

از حل مساله فوق جواب بهین زیر بدست می آید.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

در جدول داده های زیر نتیجه ارزیابی ۴ تا DMU تحت مدل ابر-کارایی بازده به مقیاس متغیر در ماهیت - ورودی مشاهده می گردد.

جدول ۱.۱: داده های ورودی و خروجی

DMU	I_2	I_1	O_1	مقدار ابر-کارایی
A	۲	۱	۱	۱
B	۱	۲	۱	۱/۴
C	۱	۴	۱	۱
D	۳	۰	۱	نشدنی

به دلیل اینکه همه DMU ها در شکل (۱.۱) خروجی یکسانی دارند، مدل (۱.۱) با مدل ابر-کارایی CRS مساوی است بنابراین $DMU D$ تحت هر دو مدل ابر-کارایی VRS و CRS نشدنی است. حال مدل ابر-کارایی گسترش یافته لی را که توسط چن و لیانگ به یک فاز تبدیل شده بود، همانطور که در فصل ۳ اشاره کردیم را بررسی می کنیم.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \tau + M * \sum_{r=1}^s \beta_r \\
 s.t \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 + \tau) x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \beta_r) y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, j \neq k, \beta_r \geq 0,
 \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

جاهایی که M عدد مثبت بزرگ تعریف می شود و کوک^۱ M را 10^5 قرار داد. مقدار ابر-کارایی مدل (۲.۱) به صورت زیر تعریف شده است:

$$1 + \tau^* + \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} \frac{1}{1 - \beta_r^*}$$

جاهایی که R توسط لی به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{r | \beta_r^* > 0\}$$

لی و چن و لیانگ نشان دادند که مدل (۱.۱) نشدنی است اگر و فقط اگر بعضی از $\beta_r^* > 0$ در مدل (۲.۱) باشند. که در فصل سوم طبق قضیه ۱.۱.۳ به اثبات رسید.

^۱cook

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید ۵ تا DMU داریم که اطلاعات آنها در جدول (۲.۱) ارائه و دارای دو ورودی و یک خروجی می باشد را در نظر بگیرید که می خواهیم آن را تحت مدل (۲.۱) و (۱.۱) بررسی کنیم.

ارزیابی سومین واحد تصمیم گیرنده مدل ابر-کارایی تحت بازده به مقیاس متغیر در ماهیت - ورودی چنین خواهد بود.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5 \leq 1\theta \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 + 0\lambda_5 \leq 4\theta \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 \geq 2 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

در مساله فوق مشاهده می گردد که قید چهارم و سوم در تناقض هستند و مساله نشدنی است. θ را هرچقدر کاهش یا افزایش دهیم DMU تحت ارزیابی به مرزی که از باقی DMU ها شکل گرفته است نمی رسد. از حل مدل (۱.۱) برای هر ۵ تا DMU مورد ارزیابی، جدول زیر بدست می آید.

جدول ۲.۱: نتیجه مجموعه داده ها تحت مدل (۱.۱)

DMU	I_2	I_1	O_1	مقدار ابر-کارایی
۱	۲	۱	۱	۱
۲	۱	۲	۱	۱.۴
۳	۱	۴	۲	نشدنی
۴	۲	۳	۱	۰.۶
۵	۳	۰	۱	نشدنی

که نشان می دهد تحت مدل (۱.۱) DMU_3 بدلیل اینکه خروجی مازاد دارد و همانطور که در مثال قبل بررسی کردیم DMU_4 بدلیل اینکه ورودی صفر دارد نشدنی است.

حال مجموعه داده های جدول (۲.۱) را برای مدل (۲.۱) بررسی می کنیم.

برای ارزیابی پنجمین واحد تصمیم گیرنده مدل ابر-کارایی گسترش یافته لی و یا شیوه تک فازی مدل چن و لیانگ چنین خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \tau + M * \sum_{r=1}^s \beta_r \\
 s.t \quad & 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 \leq 3(1 + \tau) \\
 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 \leq 0(1 + \tau) \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \geq (1 - \beta_1) \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\
 & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

از حل مساله فوق جواب بهین زیر بدست می آید.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

که جواب بهین فوق با قید سوم و چهارم در تناقض است و نشان می دهد که مدل لی و چن ولیانگ فقط برای داده های مثبت صحیح است.

از حل مدل (۲.۱) برای هر ۵ تا DMU مورد ارزیابی، جدول زیر بدست می آید.

جدول ۳.۱: نتیجه مجموعه داده ها تحت مدل (۲.۱)

DMU	β_1^*	مقدار ابر-کارایی	شاخص خروجی مازاد	$1 + \tau^*$
۱	۰	۱	۰	۱
۲	۰	۱.۴	۰	۱.۴
۳	۰.۵	۳	۲	۱
۴	۰	۰.۶	۰	۰.۶
۵	-	-	-	نشدنی

۳.۱ مدل زو ولسی

تحت مدل (۲.۱) DMU ، D ام نشدنی است و این نشان دهنده آن است که مدل (۲.۱) تنها وقتی که داده ها مثبت هستند درست است و برای داده های صفر این مدل نشدنی است.

برای بیان این موضوع، فرض کنید

$$x_i^{\max} = \max_{k=1}^n \{x_i^k\}$$

مدل زیر را که اصلاح شده مدل (۲.۱) است و توسط لی و زو^۲ ارائه شده است را بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \tau + M * \left(\sum_{r=1}^s \beta_r + \sum_{i=1}^m t_i \right) \\
 s.t \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} - t_i x_i^{\max} \leq (1 + \tau) x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \beta_r) y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, j \neq k, \quad \beta_r, t_i \geq 0
 \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

تنها فرق بین مدل (۲.۱) و (۳.۱) جمله اضافه شده $t_i x_i^{\max}$ در محدودیت ورودیها است. حالت نشدنی، وقتی DMU مورد ارزیابی ورودی صفر در یک محدودیت ورودی مدل (۲.۱) داشته باشد. اتفاق می افتد مثل

^۲Hsuan-shih Lee, Joe Zhu

DMU ، D ام در شکل (۱.۱). برای برطرف کردن حالت نشدنی ابر-کارایی مدل (۲.۱) وقتی داده صفر وجود دارد جمله x_i^{\max} را از سمت چپ محدودیت های ورودی کم کرده ایم به طوری که هیچ محدودیتی وقتی ورودی صفر وجود دارد نقض نشود. مقدار کم شده برای DMU ام در شکل (۱.۱) ۱ است که فاصله عمودی DMU ، D ام از خط چین افقی بالای D است. به دو دلیل مقدار $t_i x_i^{\max}$ را از قید ورودیها کم می کنیم:

۱. اول اینکه مدل نسبت به تغیر واحد پایدار می باشد یعنی اگر در واحد ورودیها و یا خروجی ها تغیر صورت پذیرد که باعث بوجود آمدن مساله جدید میگردد، همان جواب بهینه مساله قدیم را داشته باشد. فرض کنید ورودیهای i ام را در اسکالر b ضرب می کنیم محدودیت های ورودی مدل (۳.۱) چنین خواهد شد.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j b x_{ij} - t_i b x_i^{\max} \leq b(1 + \tau) x_{ik} \quad i = 1, \dots, m$$

$$b \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} - t_i x_i^{\max} \right) \leq b(1 + \tau) x_{ik} \quad i = 1, \dots, m$$

بعد از ساده شدن، محدودیت های ورودی جدید با محدودیت های مدل (۳.۱) یکی می شوند و مساله بدون تغیر باقی می ماند در نتیجه جواب بهینه مدل (۳.۱) نسبت به تغیر واحد پایدار است.

۲. دلیل دوم آن است که جمله $t_i x_i^{\max}$ وقتی x_{ik} صفر است هیچ وقت $t_i x_i^{\max}$ صفر نمی شود.

به عنوان مثال در شکل (۱.۱)

$$t_2^* x_2^{\max} = 1, \quad t_2^* = 0.25, \quad x_2^{\max} = 4$$

که t_2^* نسبتی از ماکزیمم ورودیهای دوم را به مرز جدید می رساند.

توجه کنید که محدودیت های خروجی همیشه برقرار هستند حتی وقتی داده صفر در خروجی ها وجود داشته باشد. بنابراین محدودیت های خروجی بدون تغیر باقی مانده اند. به همین دلیل مدل های ابر-کارایی در ماهیت - خروجی گسترش یافته لی [؟] در سال ۲۰۱۱ و چن ولیانگ [؟] در سال ۲۰۱۱ و کوک [؟] در سال ۲۰۰۹ همیشه شدند حتی اگر خروجی صفر داشته باشند.

۱.۳.۱ مقدار ابر-کارایی مدل زو ولسی

همانطور که در فصل سوم اشاره شد چن^۳ [۴] در سال ۲۰۰۵ نشان داد که یک چیزی نیاز تا استفاده کند هم ماهیت- ورودی و هم ماهیت- خروجی مدلهای ابر-کارایی تا به طور کامل ابر-کارایی را تشخیص دهد وقتی نشدنی اتفاق می افتد. چن همچنین نشان داد که ابر-کارایی می تواند به عنوان ورودی ذخیره شده/خروجی مازاد که بوسیله یک DMU کارا بدست آمده، تلقی بشود.

فرض کنید:

$$R = \{r | \beta_r^* > 0\} \quad I = \{i | t_i^* > 0\}$$

بر پایه مدل گسترش یافته لی و کوک داریم:

شاخص ورودی ذخیره شده

$$\hat{i} = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in I} \left(\frac{1+t_i^*}{1} \right)}{|I|} & \text{اگر } I \neq \phi \\ 0 & \text{اگر } I = \phi \end{cases} \quad (4.1)$$

شاخص خروجی مازاد

$$o = \begin{cases} \frac{\sum_{r \in R} \left(\frac{1}{1-\beta_r^*} \right)}{|R|} & \text{اگر } R \neq \phi \\ 0 & \text{اگر } R = \phi \end{cases} \quad (5.1)$$

پس مقدار ابر-کارایی می تواند به صورت زیر تعریف شود.

$$\check{\theta} = 1 + \tau^* + o + \hat{i}$$

اندازه کارایی $\check{\theta}$ شامل سه قسمت است:

کارایی شعاعی: $1 + \tau^*$

شاخص ورودی های ذخیره شده: \hat{i} که توسط $\frac{\sum_{i \in I} \left(\frac{1+t_i^*}{1} \right)}{|I|}$ تعریف میشود وقتی مجموعه $\{i | t_i^* > 0\}$ تهی نباشد.

شاخص خروجی مازاد: o که توسط $\frac{\sum_{r \in R} \left(\frac{1}{1-\beta_r^*} \right)}{|R|}$ تعریف میشود وقتی مجموعه $\{r | \beta_r^* > 0\}$ تهی نباشد.

به طوری که

$$\frac{\sum_{i \in I} \left(\frac{1+t_i^*}{1} \right)}{|I|} = \frac{\sum_{i \in I} \left(\frac{x_i^{\max} + t_i^* x_i^{\max}}{x_i^{\max}} \right)}{|I|} > 1$$

^۳Chen

فاصله واحد تصمیم گیرنده K را منعکس می کند که زیر خط چین افقی مرز کارا قرار دارد. وقتی یک DMU بعد از حذف، از مجموعه مرجع زیر خط چین افقی مرز کارایی جدید تشکیل یافته از DMU باقی مانده می افتد شبیه واحد تصمیم گیرنده D در شکل (۱.۱)، به طوری که کارایی شعاعی اش در مدل اصلی ابر-کارایی تحت مقیاس متغیر در ماهیت -ورودی یک است که این منجر می شود ابر-کارایی اش باید ناکمتر از یک باشد و این اندازه توسط شاخص ورودی ذخیره شده حفظ می شود. توجه کنید وقتی ورودی ذخیره شده وجود داشته باشد شاخص ورودی ذخیره شده بزرگتر از یک است.

$$\frac{\sum_{r \in R} \left(\frac{1}{1 - \beta_r^*} \right)}{|R|} = \frac{\sum_{r \in R} \left(\frac{y_{rk}}{y_{rk} - \beta_r^* y_{rk}} \right)}{|R|} > 1$$

فاصله DMU ، k را منعکس می کند که بالای خط چین مرز کارا قرار دارد. وقتی یک DMU بعد از حذف، از مجموعه مرجع در ناحیه شمالی خط چین افقی مرز کارایی جدید تشکیل یافته از DMU باقی مانده می افتد به طوری که کارایی شعاعی اش در مدل ابر-کارایی تحت بتزده به مقیاس متغیر در ماهیت -ورودی یک است که این منجر می شود که ابر-کارایی اش بزرگتر از یک باشد، که این اندازه توسط شاخص خروجی مازاد حفظ می شود زیرا همواره بزرگتر از یک است. برای مثال واحد تصمیم گیرنده D در مثال (۱.۲.۱) دوباره تحت مدل زو ولی بررسی می کنیم.

که بعد از ارزیابی واحد تصمیم گیرنده D تحت مدل زو و لی داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tau + M * \left(\sum_{r=1}^s \beta_r + \sum_{i=1}^m t_i \right) \\ i = 1 \implies \quad & s.t. \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 - 3t_1 \leq 3(1 + \tau) \\ i = 2 \implies \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 - 4t_2 \leq 0(1 + \tau) \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \geq (1 - \beta_1) \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \\ & \beta_1, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

که از حل مساله فوق جواب بهین بدست می آید.

$$t_1^* = 0, \quad t_2^* = 0.25, \quad t_4^* x_4^{\max} = 1, \quad \beta_1^* = 0$$

که کارایی شعاعی اش و شاخص ورودی ذخیره شده و خروجی مازاد DMU ، D ام و مقدار ابر-کارایی برای واحد تصمیم گیرنده D به ترتیب عبارت است از:

$$1 + \tau^* = 0.666667, \quad \check{i} = 1.25, \quad 0 = 0 \implies \check{\theta} = 1.916667$$

که چون واحد تصمیم گیرنده D در مدل اصلی BCC کارا است پس ابر-کارایی اش باید بزرگتر از یک باشد که این توسط شاخص ورودی ذخیره شده حفظ می شود.

مدل (۳.۱) DMU ، D را به A ، DMU تصویر می کند. برای رسیدن DMU ، D به DMU ، A باید ابتدا ورودی هایش در $۰/۶۶۶۶۶۷$ ضرب شوند و بعد به اندازه $(۰, ۱) = (t_1^* x_1, t_2^* x_2^{\max})$ به بالا حرکت کند.

در حالی که $t_2 = ۰/۲۵$ درصدی از ماکزیمم ورودی دوم ($x_2^{\max} = ۴$) واحد تصمیم گیرنده D است. که طبق شکل زیر نسبت فاصله بیشترین سطح ورودی را به سطح ورودی نقطه تصویر را نشان می دهد. در واقع ما به دنبال :

$$\min (t_1, \dots, t_m) \quad s.t. \quad ((1 + (t_1, \dots, t_m))x_k, y_k) \in T_v \quad (۶.۱)$$

هستیم. و چون همه ورودیها به یک نسبت کم نمی شوند و برای هر ورودی یک t ای وجود دارد پس در نشان دادن شاخص میانگین این می گیریم.

مثال ۱.۳.۱. مدل جدید را برای DMU های مثال (۲.۲.۱) ارزیابی می کنیم در ارزیابی سومین DMU داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tau + M * \left(\sum_{r=1}^s \beta_r + \sum_{i=1}^m t_i \right) \\ i=1 \Rightarrow \quad & s.t. \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 + 3\lambda_5 - 3t_1 \leq 1(1 + \tau) \\ i=2 \Rightarrow \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 + 0\lambda_5 - 4t_2 \leq 4(1 + \tau) \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 \geq 2(1 - \beta_1) \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \\ & \beta_1, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

که از حل مساله فوق جواب بهین زیر بدست می آید.

$$t_1^* = 0, \quad t_2^* = 0, \quad \beta_1^* = 0/5, \quad \beta_1^* y_{13} = 1$$

که مقدار ابر-کارایی برای سومین واحد تصمیم گیرنده عبارت است از :

$$1 + \tau^* = 1, \quad \check{i} = 0. \quad o = 2 \Rightarrow \check{\theta} = 3$$

وجود شاخص خروجی مازاد در سومین واحد تصمیم گیرنده نشان دهنده این است که سومین واحد تصمیم گیرنده در مدل ابر-کارایی در ماهیت -ورودی نشدنی است زیرا $\beta^* > 0$ است.

جدول زیر نتیجه داده ها را برای مدل (۳.۱) نشان می دهد.

جدول ۴.۱: نتیجه مجموعه داده ها تحت مدل (۳.۱)

DMU	$1 + \tau^*$	\tilde{i}	o	مقدار ابر-کارایی	t_1^*	t_2^*	β_1^*	tx_2^{\max}	$\beta_1^* y_{rk}$
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱.۴	۰	۰	۱.۴	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۱	۰	۲	۳	۰	۰	۰.۵	۰	۱
۴	۰.۶	۰	۰	۰.۶	۰	۰	۰	۰	۰
۵	۰.۶۶۶۶۶۷	۱.۲۵	۰	۱.۹۱۶۶۶	۰	۰.۲۵	۰	۱	۰

در مقایسه جدول های (۲.۱) و (۳.۱) و (۴.۱) به این نتیجه می رسیم که در جدول اول تحت مدل ابر-کارایی یازده به مقیاس متغیر در ماهیت - ورودی، سومین و پنجمین واحد تصمیم گیرنده نشدنی هستند در جدول دوم تحت مدل گسترش یافته لی و یا شیوه یک فازی چن و لیانگ در ماهیت - ورودی سومین واحد تصمیم گیرنده نشدنی است و در جدول آخر تحت مدل ابر-کارایی زو ولی که اصلاح شده مدلهای قبلی در ماهیت - ورودی است همه داده ها تحت این مدل شدند.

جدول دوم وسوم نشان می دهند که مقدار ابر-کارایی و همچنین نتیجه های جدول هر دو وقتی داده ها مثبت باشند نشدنی هستند که این نتیجه به صورت قضیه زیر به اثبات رسیده است.

قضیه ۲.۳.۱. اگر داده ها مثبت باشند مدل (۲.۱) و مدل (۳.۱) معادل می شوند و نتیجه های یکسانی بدست می آورند.

□

برهان.

۲.۳.۱ ماهیت - خروجی مدل زو ولی

بخش قبلی در حالت ماهیت - ورودی مدل های لی و زو بحث شد در این بخش به ماهیت - خروجی این مدل ها می پردازیم در حقیقت در شکل (۱.۱) واحد تصمیم گیرنده D در ماهیت - خروجی هم نشدنی است شبیه روش قبلی مدل لی و چن و لیانگ را اصلاح کرده و مدل جدیدی را در ماهیت - خروجی طبق مدل زیر ارائه می دهیم.

DMU	مقدار ابر-کارایی تعریف شده توسط چن و لیانگ	$\hat{\beta}$
۲	۰/۴۱۳۷۹۳	۰/۵۰۷۰۴۲
۳	۰/۵	۰/۵
۴	۱/۷۵	۱/۷۵
۵	نشدنی	۰/۴۴۴۴۴۴

۴.۱ مثال کاربردی برای معادن حفاری ایلی نويز

در این بخش مدل جدید و مدل هایی که قبل از آن ارائه شده را روی مجموعه داده های واقعی به کار می بریم و این مدل ها را باهم مقایسه می کنیم، در واقع مجموعه داده های بیرنس را ارزیابی می کنیم که این مجموعه داده، بر روی ۱۵ معدن حفاری استان ایلی نويز در ایالت متحده آمریکا در مورد کارایی در سال ۱۹۸۴ مورد مطالعه قرار گرفته است. این مجموعه داده ها در جدول (۶.۱) نشان داده شده است به طوری که دارای فقط یک خروجی که شامل ۱۰۰۰ تن زغال سنگ تولید شده و هشت ورودی است. یکی از ورودیها کارگرها هستند که شامل هزار معدنچی روزکار می شود، دیگر متغیرهای ورودی شامل سه متغیر اندازه ($K1, K2, K3$) و چهار متغیر ورودی زمین شناسی ($T1, D1, T2, D2$) می باشد به طوری که:

$K1$ ظرفیت سطل کابل دار بر حسب متر مکعب

$K2$ ظرفیت ملاقه بیل مکانیکی بر حسب متر مکعب

$K3$ ظرفیت عمق حفاری زمین بوسیله دستگاه حفاری بر حسب متر مکعب در ساعت

$T1$ ضخامت اولین رگه نازک معدن از بالا بر حسب فوت

$D1$ عمق اولین رگه نازک معدن بر حسب فوت

$T2$ ضخامت دومین رگه نازک معدن از پایین بر حسب فوت

$D2$ عمق دومین رگه نازک معدن بر حسب فوت

جدول ۶.۱: مجموعه داده های ۱۵ معدن حفاری ایلی نويز

DMU	کارگرها	$K1$	$K2$	$K3$	$T1$	$1/D1$	$T2$	$1/D2$	خروجی
۱	۹۸/۵	۱۴۲	۲۴۵	۰	۶	۰/۰۱۶	۴/۳	۰/۰۱۲	۳۲۶۴
۲	۹۶/۵	۳۰	۲۱۵	۰	۶	۰/۰۱۶	۰	۰	۳۰۶۵
۳	۵۷/۶	۱۸	۱۰۵	۰	۵/۶	۰/۰۲۶	۴/۲	۰/۰۱۶	۲۲۷۵
۴	۵۹/۲	۱۶۰	۰	۰	۵/۹	۰/۰۲۵	۳/۷	۰/۰۱۱	۱۹۷۸

خروجی	۱/D۲	T۲	۱/D۱	T۱	K۳	K۲	K۱	کارگر ها	DMU
۱۸۳۳	۰/۰۱۱	۳/۵	۰/۰۲۲	۸	۰	۰	۲۰۰	۵۷/۶	۵
۱۲۱۸	۰	۰	۰/۰۱۹	۴/۵	۰	۸۵	۲۷	۴۹/۹	۶
۹۲۸	۰	۰	۰/۰۱	۶	۰	۶۵	۱۴۳	۵۳/۵	۷
۹۱۹	۰/۰۱	۵	۰/۰۲	۶	۱۲	۶۵	۷۰	۳۴	۸
۷۷۷	۰	۰	۰/۰۱۳	۶/۵	۰	۴۰	۶۷/۵	۳۹/۶	۹
۷۴۵	۰	۰	۰/۰۱۹	۳/۲	۰	۱۴۵	۰	۵۱/۳	۱۰
۷۴۲	۰	۰	۰/۰۱۴	۲/۱	۰	۶۵	۱۱۰	۷۴/۲	۱۱
۴۸۸	۰	۰	۰/۰۱۲	۴/۴	۰	۶۵	۲۵	۲۴	۱۲
۴۰۷	۰	۰	۰/۰۱۴	۳	۰	۰	۵۸	۲۶/۵	۱۳
۴۰۲	۰	۰	۰/۰۱۲	۶/۵	۰	۰	۷۰	۴۳/۱	۱۴
۳۹۶	۰	۰	۰/۰۱	۵/۷	۰	۰	۲۳۶	۲۰/۷	۱۵

در این مجموعه داده های خاص چندین ورودی صفر وجود دارد. تنها هشتمین DMU تحت فرض بازده به مقیاس متغیر ناکارا است.

جدول (۶.۴) نتیجه ارزیابی مجموعه داده های معادن ایلی نويز را در مدل اصلی ابر-کارایی تحت بازده به مقیاس متغیر و مدل گسترش یافته لی و چن و لیانگ و مدل جدید نشان می دهد همانطور که در جدول مشاهده می کنید در ارزیابی DMU ها تحت مدل اصلی ابر-کارایی در ماهیت - ورودی DMU های ۱، ۲، ۴ و ۱۳ نشدنی هستند بدلیل اینکه خروجی مازاد در این واحد وجود دارد به عبارتی این DMU ها بالای مجموعه امکان تولید جدید قرار گرفته اند و هر چه قدر این ورودیها را افزایش یا کاهش دهیم مجموعه امکان تولید را قطع نخواهند کرد.

برای مثال DMU_1 خروجی مازاد

$$\beta_1^* y_{11} = 0.060968 \times 3264 = 199$$

دارد بنابراین تحت مدل اصلی ابر-کارایی در ماهیت - ورودی نشدنی است. DMU_{13} خروجی مازاد

$$\beta_{13}^* y_{11} = 0.012285 \times 407 = 5$$

دارد بنابراین تحت مدل اصلی ابر-کارایی در ماهیت - ورودی نشدنی هست، در مدل (۳.۱) خروجی مازاد بر طرف می شود و ورودی ذخیره شده DMU_{13}

$$t_3^* x_3^{\max} = 0.001648 \times 245 = 0.40376$$

می شود. DMU_1 بدلیل وجود صفر در ورودی هایش تحت مدل اصلی ابر-کارایی در ماهیت - ورودی نشدنی است و در نتیجه ورودی ذخیره شده

$$t_1^* x_3^{\max} = 0.108045 \times 236 = 25.49862$$

جدول ۷.۱: نتیجه ارزیابی مجموعه داده های معادن حفاری ایلی نويز

DMU	ماهیت-ورودی				
	مدل اصلی ابر-کارایی	مدل (۲.۱)		مدل (۳.۱)	
		مقدار ابر-کارایی	جزئیات جواب	مقدار ابر-کارایی	جزئیات جواب
۱	نشدنی	۲/۰۶۴۹۲۷	$\beta_1^* = ۰/۰۶۰۹۶۸$	۲/۰۶۴۹۲۷	$\beta_1^* = ۰/۰۶۰۹۶۸$
۲	نشدنی	۳/۷۰۳۹۲	$\beta_1^* = ۰/۰۶۰۲۶۱$	۳/۷۰۳۹۲	$\beta_1^* = ۰/۰۶۰۲۶۱$
۳	۱/۵۴۷۳۴۶	۱/۵۴۷۳۴۶		۱/۵۴۷۳۴۶	
۴	نشدنی	۲/۴۳۵۰۳۷	$\beta_1^* = ۰/۰۷۳۳۰۶$	۲/۴۳۵۰۳۷	$\beta_1^* = ۰/۰۷۳۳۰۶$
۵	۱/۰۷۳۸۷۱	۱/۰۷۳۸۷۱		۱/۰۷۳۸۷۱	
۶	۱/۱۵۹۸۱۹	۱/۱۵۹۸۱۹		۱/۱۵۹۸۱۹	
۷	۱/۱۴۶۸۱	۱/۱۴۶۸۱		۱/۱۴۶۸۱	
۸	۰/۰۹۳۷۴۶۷	۰/۰۹۳۷۴۶۷		۰/۰۹۳۷۴۶۷	
۹	۱/۰۰۱۴۳۸	۱/۰۰۱۴۳۸		۱/۰۰۱۴۳۸	
۱۰	نشدنی	نشدنی		۲/۵۳۲۹۰۹	$t_1^* = ۰/۱۰۸۰۴۵$
۱۱	۱/۵۵۴۳۱۵	۱/۵۵۴۳۱۵		۱/۵۵۴۳۱۵	
۱۲	۱/۴۷۸۸۲۷	۱/۴۷۸۸۲۷		۱/۴۷۸۸۲۷	
۱۳	نشدنی	۳/۱۷۹۱۰۴	$\beta_1^* = ۰/۰۱۲۲۸۵$	۳/۱۶۸۰۰۱	$t_1^* = ۰/۰۰۱۶۴۸$
۱۴	۱/۱۲۷۴۸۳	۱/۱۲۷۴۸۳		۱/۱۲۷۴۸۳	
۱۵	۱/۳۷۶۰۸۵	۱/۳۷۶۰۸۵		۱/۳۷۶۰۸۵	

می شود یعنی دومین ورودی تصویر DMU_1 روی مرز جدید تشکیل شده از باقی DMU ها، $۲۵/۴۹۸۶۲$ است و دومین ورودی خود DMU_1 صفر است. DMU_1 ورودی ذخیره شده به اندازه $۲۵/۴۹۸۶۲$ در دومین ورودی اش دارد به همین دلیل تحت مدل اصلی ابر-کارایی و مدل لی و چن و لیانگ نشدنی است. پنجمین ستون جدول (۷.۱) نشان می دهد که همه DMU ها شدنی هستند حتی وقتی که ورودی ذخیره شده در DMU_1 یا خروجی مازاد در DMU_1 وجود دارد.

در ماهیت - خروجی جدول (۸.۱)، DMU_1 تحت مدل ابر کارایی مدل لی که در فصل ۳ در بخش (۲.۳.۱) به آن اشاره شد، نشدنی است زیرا در دومین ورودی اش یعنی K_1 ورودی ذخیره شده دارد. مدل (۷.۱) ورودی ذخیره شده را توسط قید های ورودی به صورت زیر نشان می دهد.

$$t_1^* x_1^{\max} = ۰/۲۲۵۷۸۷ \times ۲۳۶ = ۵۳/۲۸۵۷۳$$

بنابراین در مدل (۷.۱) مقدار ابر-کارایی در ماهیت - خروجی که از حذف DMU_1 بدست آمده است برابر با $۰/۳۳۲۷۰۷$ می شود.

جدول ۸.۱: جدول مربوط به مثال کاربردی

DMU	ماهیت-خروجی		
	مدل (۷.۱)		جزئیات جواب
	مقدار ابر-کارایی	مقدار ابر-کارایی	
	تعریف شده لی		
۱	۰/۹۳۹۰۳۲	۰/۹۳۹۰۳۲	
۲	۰/۳۰۲۱۹۹	۰/۳۰۲۱۹۹	
۳	۰/۴۶۶۰۸۱	۰/۴۶۶۰۸۱	
۴	۰/۶۲۳۹۰۳	۰/۶۲۳۹۰۳	
۵	۰/۹۰۶۴۹۲	۰/۹۰۶۴۹۲	
۶	۰/۷۰۶۷۵۹	۰/۷۰۶۷۵۹	
۷	۰/۳۱۶۴۸۹	۰/۳۱۱۱۴۷	$t_6^* = ۰/۰۳۳۹۰۴$
۸	۰/۰۹۳۷۴۶۷	۱/۱۳۰۰۷۷	
۹	۰/۹۹۴۹۸۷	۰/۹۹۴۹۸۷	
۱۰	نشانی	۰/۳۳۲۷۰۷	$t_7^* = ۰/۲۲۵۷۸۷$
۱۱	۰/۳۰۷۵۳۵	۰/۳۴۰۶۴۶	$t_8^* = ۰/۱۱۲۵$
۱۲	۰/۴۳۹۷۵	۰/۴۳۸۶۴۹	$t_9^* = ۰/۰۲۵۳۸۱, t_{10}^* = ۰/۱۳۹۸۳۱, t_{11}^* = ۰/۰۷۶۹۲۳$
۱۳	۰/۳۷۳۲۶	۰/۴۹۱۵۳۹	$t_{12}^* = ۰/۲۳۰۶۸, t_{13}^* = ۰/۱۷۹۷۵۵$
۱۴	۰/۴۶۸۶۶۷	۰/۴۸۶۳۶۵	$t_{14}^* = ۰/۰۶۶۵۵۱$
۱۵	۰/۴۳۲۳۲۶	۰/۴۸۰۹۲۲	$t_{15}^* = ۰/۰۵۸۸۸۳, t_{16}^* = ۰/۱۵۳۸۴۶$

جدول ۹.۱: نتیجه مجموعه داده های معادن حفاری ایلی نويز در حالت بازده به مقیاس ثابت

DMU	مقدار ابر-کارایی مدل اصلی	مقدار ابر-کارایی مدل (۳.۱)
۱	۱/۰۶۴۹۲۷	۱/۰۶۴۹۲۷
۲	۲/۹۴۱۸۳۵	۲/۹۴۱۸۳۵
۳	۱/۴۷۸۹۴۳	۱/۴۷۸۹۴۳
۴	۱/۴۶۳۱۹۴	۱/۴۶۳۱۹۴
۵	۱/۰۵۳۰۶۱	۱/۰۵۳۰۶۱
۶	۰/۹۲۴۱۴	۰/۹۶۴۹۰۵
۷	۰/۸۲۰۴۵۹	۰/۸۹۸۲۴۱
۸	۰/۶۸۴۳۴۹	۰/۶۸۴۳۴۹
۹	۰/۸۸۵۱۱۵	۱/۳۵۵۶۰۳
۱۰	نشدنی	۱/۴۹۳۶۹۱
۱۱	۰/۷۶۸۵۶۶	۰/۷۹۱۳۷۱
۱۲	۰/۶۴۰۱۸۵	۰/۶۴۰۱۸۵
۱۳	۲/۱۲۰۵۰۴	۲/۲۲۰۴۴۱
۱۴	۱/۱۱۷۱۸۲	۱/۶۴۴۹۵۸
۱۵	۱/۳۴۰۸۶۳	۲/۰۵۸۱۹۶

جدول (۹.۱) مجموعه داده های معادن حفاری ایلی نويز را در حالت بازده به مقیاس ثابت ارزیابی می کند و مدل اصلی ابر-کارایی در ماهیت - ورودی و مدل جدید لی و زو در ماهیت - ورودی که از حذف قید $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1$ بدست آمده است را برای ارزیابی به کار می برد.

همانطور که در جدول مشاهده می کنید فقط DMU_1 تحت مدل اصلی ابر-کارایی در حالت بازده به مقیاس ثابت نشدنی است. در مدل لی و زو هم، بدلیل اینکه ورودی ذخیره شده $(t_i^* x_i^{\max})$ را در حالت بازده به مقیاس ثابت حساب کرده است، DMU_1 تحت این مدل شدنی است.