فصل ۱
مقدمات

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. که نقش آن را با

۱. $\langle v+u,w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle u,w\rangle$.

۲. $\langle av,w\rangle = a\langle v,w\rangle$.

۳. $\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle$.

۴. $\langle v,v\rangle \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $v=0$.

تابع $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ با تعریف

$$\langle (z_1,z_2,...z_n),(t_1,t_2,...,t_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{t_i}$$

یک حاصل‌ضرب داخلی روی $\mathbb{C}^n$ است. این ضرب را ضرب داخلی متعارف یا اسکالر می‌نامیم. ضرب داخلی متعارف یا استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ را نیز بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle (x_1,x_2,...x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

فضای $\mathbb{R}^n$ با این حاصل‌ضرب را فضای n بعدی اقلیدسی می‌نامیم.روشن است که این ضرب تحدید ضرب متعارف روی $\mathbb{C}^n$ به $\mathbb{R}^n$است.

قضیه ۱.۱ *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت به ازای هر $v,u,w \in V$ و $a \in \mathbb{C}$ داریم*

۱. $\langle v,u+w\rangle = \langle v,u\rangle + \langle v,w\rangle$.

۲. $\langle v,aw\rangle = \overline{a}\langle v,w\rangle$.

۳. $\langle v,v\rangle \in \mathbb{R}$.

۴. $\langle v,0\rangle = \langle 0,v\rangle = 0$.

اثبات *تمام قسمت‌ها اثبات ساده‌ای دارند. برای نمونه*

$$\begin{aligned}\langle v,u+w\rangle &= \overline{\langle u+w,v\rangle} = \overline{\langle u,v\rangle + \langle w,v\rangle}\\ &= \overline{\langle u,v\rangle} + \overline{\langle w,v\rangle} = \langle v,u\rangle + \langle v,w\rangle\end{aligned}$$

و یا

$$\langle v, aw\rangle = \overline{\langle aw, v\rangle} = \overline{a\langle w, v\rangle} = \bar{a}\overline{\langle w, v\rangle} = \bar{a}\langle v, w\rangle$$

به روشنی نیز داریم $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \Rightarrow \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$
و

$$\langle ۰, v\rangle = \langle v - v, v\rangle = \langle v, v\rangle + \langle -v, v\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, v\rangle = ۰$$

و بدیهی است که $\langle v, ۰\rangle = ۰$.

تعریف ۱.۱ *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. به ازای هر $v \in V$ نرم v را که با $\|v\|$ نمایش می‌دهیم بصورت $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ تعریف می‌کنیم.*

قضیه ۲.۱ *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و $v, u \in V$. در این صورت*

۱. *$\|v\| = ۰$ اگر و فقط اگر $v = ۰$.*

۲. *$\|av\| = |a|\|v\|$ که در آن $a \in \mathbb{C}$.*

۳. *$|\langle v, u\rangle| \leq \|v\|\|u\|$ (نامساوی کوشی-شوارتز) و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به ازای اسکالر ناصفری چون a داشته باشیم $u = av$.*

۴. *$\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (نامساوی مثلثی)*

قضیه ۳.۱ *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و W زیرفضایی با بعد متناهی از آن باشد. در این صورت $V = W \oplus W^{\perp}$.*

اثبات *فرض کنید* $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ *یک پایه متعامد یکه برای* W *باشد. اگر* $v \in V$ *آنگاه* $w = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$ *متعلق به* W *است زیرا ترکیب خطی از* u_i *هاست. نشان می‌دهیم* $v - w \in W^{\perp}$ *. برای این منظور فرض کنید* $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ *بردار دلخواهی در* W *باشد. داریم*

$$
\begin{aligned}
\langle v - w, u \rangle &= \langle v - w, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle = \\
&= \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \langle w, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \langle w, u_i \rangle \\
&= \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j, u_i \rangle \\
&= \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \Big(\overline{a_1} \langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j, u_1 \rangle \\
&\quad + \overline{a_2} \langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j, u_2 \rangle + \cdots + \overline{a_n} \langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j, u_n \rangle \Big) \\
&= \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \Big(\overline{a_1} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle \langle u_j, u_1 \rangle}^{\langle v, u_1 \rangle} \\
&\quad - \overline{a_2} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle \langle u_j, u_2 \rangle}^{\langle v, u_2 \rangle} + \cdots + \overline{a_n} \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle \langle u_j, u_n \rangle}^{\langle v, u_n \rangle} \Big) \\
&= \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \Big(\overline{a_1} \langle v, u_1 \rangle + \overline{a_2} \langle v, u_2 \rangle + \cdots + \overline{a_n} \langle v, u_n \rangle \Big) \\
&= \langle v, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} \langle v, u_i \rangle = 0
\end{aligned}
$$

پس $v - w \perp u$ *و لذا* $v - w$ *متعلق به* $W^{\perp}$ *است. اکنون داریم*

$$v = w + (v - w) \in W + W^{\perp} Rightarrow V = W + W^{\perp}$$

از طرفی اگر $x \in W \cap W^{\perp}$ *آنگاه* $x \in W$ *و* $x \in W^{\perp}$ *. پس* x *بر هر عنصر* W *از جمله بر* x *عمود است. بنابراین*

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap W^{\perp} = \{0\}$$

با توجه به قضایای جبر خطی داریم $V = W \oplus W^{\perp}$.

قضیه ۴.۱ *هر ماتریس مربعی (عملگر خطی روی فضای متناهی بعد) حداقل یک مقدار ویژه دارد.*

اثبات *فرض کنید* A *یک ماتریس* $n \times n$ *مختلط باشد. بردار ناصفر* $v \in \mathbb{C}^n$ *ا را در نظر می‌گیریم. مجموعه* $\{v, Av, A^2 v, \dots, A^n v\}$ *وابسته خطی است زیرا بیش از* n *عنصر دارد. پس اسکالرهای* $a_0, a_1, \dots, a_n$ *وجود دارند که همگی باهم صفر نیستند و* $a_0 v + a_1 Av + \cdots + a_n A^n v = 0$*. فرض کنید* $m \leq n$ *بزرگترین عددی باشد که* $a_m \neq 0$*. (بدیهی است که* $m \geq 1$*) می‌توان*

فرض کرد که $a_m = 1$ زیرا در غیر این صورت با ضرب اسکالرها در a_m^{-1} نتیجه دلخواه بدست می‌آید. اکنون چندجمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$p(A)v = (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n)v = a_0 v + a_1 Av + \cdots + a_n A^n v = 0$$

از آنجاییکه p در $\mathbb{C}$ به عوامل خطی تجزیه می‌شود می‌توان نوشت $P(x) = (x - b_m)\cdots(x - b_1)(x - b_0)$. بنابراین داریم

$$P(A)v = 0 Rightarrow (A - b_m I)\cdots(A - b_1 I)(A - b_0 I)v = 0$$

فرض کنید $k \leq m$ کوچکترین عددی باشد که $(A - b_k I)\cdots(A - b_1 I)(A - b_0 I)v = 0$. پس بردار $w = (A - b_{k-1} I)\cdots(A - b_1 I)(A - b_0 I)v$ ناصفر است و داریم $(A - b_k I)w = 0$. یعنی b_k مقدار ویژه و w بردار ویژه متناظر با آن است.

قضیه ۵.۱ اگر $\lambda = 0$ مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه $|A| = 0$.

اثبات داریم $|A| = |0 I - A| = \chi_A(0) = 0$.

قضیه ۶.۱ مقادیر ویژه ماتریس‌های A و A^t یکی هستند.

اثبات فرض کنید λ یک مقدار ویژه A باشد. در این صورت داریم

$$\chi_{A^t}(\lambda) = |(\lambda I - A)^t| = |\lambda I - A| = \chi_A(\lambda) = 0$$