فصل ۱

مقدمات

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. که نقش آن را با

۱. $\langle v+u, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle u, w\rangle$.

۲. $\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$.

۳. $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$.

۴. $\langle v, v\rangle \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $v = 0$.

تابع $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ با تعریف

$$\langle (z_1, z_2, ...z_n), (t_1, t_2, ..., t_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{t_i}$$

یک حاصل‌ضرب داخلی روی $\mathbb{C}^n$ است. این ضرب را ضرب داخلی متعارف یا اسکالر می‌نامیم. ضرب داخلی متعارف یا استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ را نیز بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle (x_1, x_2, ...x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

فضای $\mathbb{R}^n$ با این حاصل‌ضرب را فضای n بعدی اقلیدسی می‌نامیم.روشن است که این ضرب تحدید ضرب متعارف روی $\mathbb{C}^n$ به $\mathbb{R}^n$است.

قضیه ۱.۱ *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت به ازای هر $v, u, w \in V$ و $a \in \mathbb{C}$ داریم*

۱. $\langle v, u+w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$.

۲. $\langle v, aw\rangle = \overline{a}\langle v, w\rangle$.

۳. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$.

۴. $\langle v, 0\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$.

اثبات *تمام قسمت‌ها اثبات ساده‌ای دارند. برای نمونه*

$$\begin{aligned}\langle v, u+w\rangle &= \overline{\langle u+w, v\rangle} = \overline{\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle} \\ &= \overline{\langle u, v\rangle} + \overline{\langle w, v\rangle} = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

و یا

$$\langle v, aw\rangle = \overline{\langle aw, v\rangle} = \overline{a\langle w, v\rangle} = \overline{a}\overline{\langle w, v\rangle} = \overline{a}\langle v, w\rangle$$

به روشنی نیز داریم $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \Rightarrow \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$

و

$$\langle ۰, v\rangle = \langle v - v, v\rangle = \langle v, v\rangle + \langle -v, v\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, v\rangle = ۰$$

و بدیهی است که $\langle v, ۰\rangle = ۰$.

تعریف ۱.۱ فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. به ازای هر $v \in V$ نرم v را که با $\|v\|$ نمایش می‌دهیم بصورت $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲.۱ فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و $v, u \in V$. در این صورت

۱. $\|v\| = ۰$ اگر و فقط اگر $v = ۰$.

۲. $\|av\| = |a|\|v\|$ که در آن $a \in \mathbb{C}$.

۳. $|\langle v, u\rangle| \leq \|v\|\|u\|$ (نامساوی کوشی-شوارتز) و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر به ازای اسکالر ناصفری چون a داشته باشیم $u = av$.

۴. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (نامساوی مثلثی)

قضیه ۳.۱ فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و W زیرفضایی با بعد متناهی از آن باشد. در این صورت $V = W \oplus W^{\perp}$.

اثبات فرض کنید $B = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای W باشد. اگر $v \in V$ آنگاه $w = \sum_{i=۱}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i$ متعلق به W است زیرا ترکیب خطی از u_i هاست. نشان می‌دهیم $v - w \in W^{\perp}$. برای این منظور فرض کنید $u = \sum_{i=۱}^{n} a_i u_i$ بردار دلخواهی در

W باشد. داریم

$$\begin{aligned}
\langle v-w,u\rangle &= \langle v-w,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle = \\
&= \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \langle w,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle = \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}\langle w,u_i\rangle \\
&= \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}\langle\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle u_j,u_i\rangle \\
&= \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \Big(\overline{a_1}\langle\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle u_j,u_1\rangle \\
&\quad + \overline{a_2}\langle\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle u_j,u_2\rangle + \cdots + \overline{a_n}\langle\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle u_j,u_n\rangle\Big) \\
&= \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \Big(\overline{a_1}\overbrace{\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle\langle u_j,u_1\rangle}^{\langle v,u_1\rangle} \\
&\quad - \overline{a_2}\overbrace{\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle\langle u_j,u_2\rangle}^{\langle v,u_2\rangle} + \cdots + \overline{a_n}\overbrace{\sum_{j=1}^{n}\langle v,u_j\rangle\langle u_j,u_n\rangle}^{\langle v,u_n\rangle}\Big) \\
&= \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \Big(\overline{a_1}\langle v,u_1\rangle + \overline{a_2}\langle v,u_2\rangle + \cdots + \overline{a_n}\langle v,u_n\rangle\Big) \\
&= \langle v,\sum_{i=1}^{n} a_iu_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}\langle v,u_i\rangle = 0
\end{aligned}$$

پس $v-w\perp u$ و لذا $v-w$ متعلق به $W^{\perp}$ است. اکنون داریم

$$v = w + (v-w) \in W + W^{\perp} Rightarrow V = W + W^{\perp}$$

از طرفی اگر $x \in W \cap W^{\perp}$ آنگاه $x \in W$ و $x \in W^{\perp}$. پس x بر هر عنصر W از جمله بر x عمود است. بنابراین

$$\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap W^{\perp} = \{0\}$$

با توجه به قضایای جبر خطی داریم $V = W \oplus W^{\perp}$.

قضیه ۴.۱ هر ماتریس مربعی (عملگر خطی روی فضای متناهی بعد) حداقل یک مقدار ویژه دارد.

اثبات فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ مختلط باشد. بردار ناصفر $v \in \mathbb{C}^n$ ار را در نظر می‌گیریم. مجموعه $\{v, Av, A^2v, \ldots, A^nv\}$ وابسته خطی است زیرا بیش از n عنصر دارد. پس اسکالرهای $a_0, a_1, \ldots, a_n$ وجود دارند که همگی باهم صفر نیستند و $a_0v + a_1Av + \cdots + a_nA^nv = 0$. فرض کنید $m \le n$ بزرگترین عددی باشد که $a_m \neq 0$. (بدیهی است که $m \geq 1$) می‌توان فرض کرد که $a_m = 1$ زیرا در غیر این صورت با ضرب اسکالرها در a_m^{-1} نتیجه دلخواه بدست می‌آید. اکنون چندجمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$p(A)v = (a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n)v = a_0v + a_1Av + \cdots + a_nA^nv = 0$$

از آنجاییکه p در $\mathbb{C}$ به عوامل خطی تجزیه می‌شود می‌توان نوشت $P(x) = (x-b_m)\cdots(x-b_1)(x-b_0)$. بنابراین داریم

$$P(A)v = 0 Rightarrow (A-b_mI)\cdots(A-b_1I)(A-b_0I)v = 0$$

فرض کنید $k \leq m$ کوچکترین عددی باشد که $(A-b_kI)\cdots(A-b_1I)(A-b_0I)v = 0$. پس بردار $w = (A-b_{k-1}I)\cdots(A-b_1I)(A-b_0I)v$ ناصفر است و داریم $(A-b_kI)w = 0$. یعنی b_k مقدار ویژه و w بردار ویژه متناظر با آن است.

قضیه ۵.۱ *اگر $\lambda = 0$ مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه $|A| = 0$.*

اثبات *داریم $|A| = |0I - A| = \chi_A(0) = 0$.*

قضیه ۶.۱ *مقادیر ویژه ماتریس‌های A و A^t یکی هستند.*

اثبات *فرض کنید λ یک مقدار ویژه A باشد. در این صورت داریم*

$$\chi_{A^t}(\lambda) = |(\lambda I - A)^t| = |\lambda I - A| = \chi_A(\lambda) = 0$$