فصل اول

۱ تعاریف اولیه

۱.۱ ایده آل

ایده آل :ز یرمجموعه ی ناتهی I از حلقه ی R یک ایده آل چپ (راست) است $\Longleftrightarrow$

$\forall a,b \in I \qquad r \in R$

$$a,b \in I \Longrightarrow a-b \in I \qquad (۱)$$

$$a \in I, r \in R \Longrightarrow ra \in I (ar \in I) \qquad (۲)$$

۲.۱ ایده آل اول

ایده آل اول: فرض کنیدP ایده آل حلقه تعویض پذیر R باشد، P را اول گوییم هرگاه :

- Pایده آل واقعی باشد
- $\forall a,b \in P ab \in P \Longrightarrow a \in P \vee b \in P$

۳.۱ ایده آل اولیه چپ(راست)

ایده آل P از حلقه اولیه چپ(راست) است، اگر حلقه خارج قسمتی R/Pیک حلقه اولیه چپ(راست) باشد.

۴.۱ ایده آل اول می نیمال

Rحلقه یکدار باشد. ایده آل اول P در Rیک ایده آل اول می نیمال ایده آل Iنام دارد. اگر$I \subset P$باشد و ایده آل اولی چون $\acute{P}$ موجود نباشد که $I \subset \acute{P}$

۵.۱ ایده آل پوچ توان

ایده آل I ازحلقه ی R پوچ توان باشد. یعنی به ازای عدد صحیحی مانند n بتوان نوشت: $I^n = ۰$

۶.۱ ایده آل اولیه:

یده آل $q (\neq R)$در حلقه ی تعویض پذیر R اولیه است، اگر به ازای هر $a,b \in R$ داشته باشیم
به ازای $n > ۰ \qquad a \in q \wedge ab \in q \Longrightarrow b^n \in q$

۷.۱ حلقه ی ساده

Rحلقه ی ساده است، اگر $R^۲ \neq ۰$. و Rایده آل (دوطرفه) حقیقی نداشته باشد.

۸.۱ حلقه ی اول

R حلقه ی اول است، اگر ایده آل صفر یک ایده آل اول باشد، هر گاه I وJ ایده آل هایی باشند به طوری که $IJ = ۰ \Longleftarrow I = ۰ \vee J = ۰$

۹.۱ حلقه ی نیمه اول

Rحلقه ی نیمه اول نامیده می شود، اگر دارای رادیکال اول صفر باشد و یا به عبارت دیگر حلقه ای است که نسبت به رادیکال اول نیمه ساده باشد.

۱۰.۱ رادیکال اول

اگر Rحلقه باشد، اشتراک تمام ایده آل های اول R را رادیکال اول گویند و با $P(R)$ نشان می دهند.هر گاه R ایده آل اول نداشته باشد در آن صورت اشتراک تمام ایده آل های اول برابر ایده آل می نیمال است. یعنی $P(R) = P$.با توجه به تعریف رادیکال اول در حلقه ی نیمه اول $P(R) = ۰$ است.

قضیه حلقه ی Rنیمه اول است $\Longleftrightarrow$ R ایده آل پوچ توان ناصفر نداشته باشد.

۱۱.۱ عنصر پوچ توان

یک عنصر حلقه R پوچ توان است اگر به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، $a^n = ۰$

۱۲.۱ رادیکال جیکپسون

اشتراک تمام ایده آل های اول (اولیه)را رادیکال جیکبسون می گویند.در واقع رادیکال اول همان رادیکال جیکبسون است.

۱۳.۱ پوچساز(صفرساز)

اگر Rحلقه ی تعویض پذیر باشد. در این صورت به ازای هر $b \in B$،$I = \{r \in R | rb = ۰\}$ یک ایده آل R است، که پوچساز نامیده می شود.

۱۴.۱ مقسوم علیه صفر

عنصر غیر بدیهی (ناصفر) a در حلقه R مقسوم علیه صفر است اگر عنصر ناصفری مانند $b \in R$ به طوری که موجود باشد $ab = ۰$ ($ba = ۰$)

۱۵.۱ زیرمجموعه بسته ضربی

زیر مجموعه بسته ضربی می گویند هرگاه:

$(۱) ۱ \in S$
$(۲) \forall a, b \in S \Longrightarrow ab \in S$

۱۶.۱ حلقه خارج قسمتی کسرها

Sزیر مجموعه ی بسته ی ضربی از حلقه ی تعویض پذیر R است. رابطه ی هم ارزی روی مجموعه ی $R*S$ به صورت مقابل تعریف می کنیم:

$$(r,s) \sim (\acute{r},\acute{s}) \longleftrightarrow \exists s_1 \in S; \qquad s_1(r\acute{s}-\acute{r}s)=0$$

در این صورت مجموعه ی رده های هم ارزی $R*S$ تحت رابطه ی هم ارزی فوق یک حلقه ی تعویض پذیر و یکدار که جمع و ضرب آن به صورت زیر تعریف می شود:

$\frac{r}{s}+\frac{\acute{r}}{\acute{s}}=\frac{r\acute{s}+\acute{r}s}{s\acute{s}}$

$(\frac{r}{s})(\frac{\acute{r}}{\acute{s}})=\frac{r\acute{r}}{s\acute{s}})$

که این حلقه را با $S^{-1}R$نشان می دهند و حلقه ی خارج قسمتی کسرها نامیده می شود.که دارای عضو خنثی $\frac{0}{1}$ و وارون $\frac{s}{r}$ برای عنصر $\frac{r}{s}$ می باشد.

۱۷.۱

$Z_l(R)$: مجموعه ی تمام مقسوم علیه های راست صفر حلقه ی R
$r_R(I)$: پوچساز چپ زیر گروه غیر بدیهی S از حلقه ی R
$l_R(I)$: پوچساز راست زیر گروه غیر بدیهی Sاز حلقه ی R

۲

۱.۲ تعریف:

حلقه ی R دارای ویژگی راست (چپ)(A) است، هر گاه برای هر ایده آل (دو طرفه) متناهیا تولید شده I که $I \subseteq Z_l(R)$ عنصر غیر صفری مانند $a \in R$ موجود باشد، به طوری که $Ia = 0$.

حلقه R دارای ویژگی (A) است، اگر R دارای ویژگی راست وچپ (A) باشد.

باید توجه کنیم اگر حلقه ی اول R ، ایده آل غیر بدیهی $I \subseteq Z_l(R)$ را داشته باشد. در آن صورتR ویژگی (A) را ندارد زیرا :

$$I(r)_R(I) = 0 \ (l_R(I)I) = 0 \Longrightarrow r_R(I) = 0$$

همواره به یاد داشته باشید که در حلقه اول R،ایده آل غیر بدیهی I را داریم که $0 \neq I \subseteq Z_l(R)$.

به هر حال اگر حلقه ی دلخواهی داشته باشیم (به خصوص اگر اول باشد)ایده آل غیر بدیهی که زیر مجموعه ی $Z_l(R)$ یا($Z_r(R)$)باشد و حلقه ی R ویژگی(A)را داشته باشد،وجود ندارد.به عنوان مثال ،حلقه های ماتریسی $n * n$ روی میدانFکه حلقه ی اول ساده ایت، دارای ویژگی (A) می باشد

مثال زیر به خوبی نشان می دهد که ویژگی (A) همواره از چپ و راست برقرار نیست.

۲.۲ مثال:

حلقه ی صحیح $\mathbf{Z}_2$ را در نظر بگیرید.وقرار دهید $L = \frac{\mathbf{Z}_2(x)}{x^2}$ کهδ تصویر x در L است.در این صورت Lبرابر است با $L = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2\delta$ که $\delta^2 = 0$. اینک حلقه ی............ R را به صورت در نظر بگیرید. e_{ij}دارای ماتریس یکه ی واحد است و I ایده آل دو طرفه ی غیر بدیهی باشد. اگر $I(\delta e_{22}) \neq 0$ در این صورت I به صورت .... $<$ است.با ضرب کردن از سمت چپ $e_{22}(1+\delta) \vee e_{22}$ مشخص می شود $e_{22} \in I$................................

اما $I \ni e_{12}e_{22} = e_{12}$. چون I غیر بدیهی است،بنابراین I برابر است با ....

در نتیجه e_{12}پوچساز راست I است.این نشان می دهد که R ویژگی (A) از سمت راست را دارد.

می توان نشان داد که R ویژگی (A) را از سمت چپ ندارد. ایده آلی از R را به صورت .... در نظر می گیریم که $I \subseteq Z_r(R)$. در این صورت ....

زیرا : $(\frac{\mathbf{Z}_2(x)}{x^2})b + (\frac{\mathbf{Z}_2(x)}{x^2})(\frac{a}{\mathbf{Z}_2\delta}) = bL + \frac{aL}{\mathbf{Z}_2\delta}$ و سپس نشان می دهیم .... بنابراین داریم ....

در این صورت R ویژگی (A) را از سمت چپ ندارد. (یعنی می توان عناصری ارایه داد که تعریف ویژگی (A) برقرار نیست.)

۳.۲ گزاره:

حاصلضرب مستقیم $S = \prod_{i \in J} R_i$ که J مجموعه ی اندیس گزار است. ویژگی (A) را از سمت راست دارد اگر و فقط اگر به ازای هر i ، R_i ویژگی (A) را از سمت راست داشته باشد.

برهان: $\longrightarrow$

فرض کنید به ازای هر i ، R_i ویژگی (A) را از سمت راست دارد. قرار دهید

$I=\sum_{j=1}^{n} S<a_{Ji}>S \subseteq Z_l(s)$
که I ایده آل متناهیا تولید شده S است.که
$\forall j, <a_{ji}> \in S, \forall i \in J, a_{ji} \in R$.
در این صورت $I_{i.}=\sum_{j=1}^{n} R_{i.}a_{ji}R_{i.} \subseteq Z_l(R_{i.})$ به ازای بعضی از $i. \in J$.
اما باتوجه به فرض مساله وجود ندارد $\alpha_{i.} \in R_{i.}$ به طوری که $I_{i.}\alpha_{i.}=0$.
اینک دنباله ای تعریف کنید به صورت: $\alpha=\alpha_{i}$، در بقیه جا $\alpha=0$. پس نتیجه می شود که α عضوی غیر بدیهی در S است به طوری که $I\alpha=0$. حال می توان گفت که S ویژگی (A) از سمت راست دارد.

برعکس:$\longleftarrow$ قرار دهید: $I_i=\sum_{t=1}^{n} R_i a_{ti} R_i \subseteq Z_l(R_i)$ که I_i ایده آل متناهیا تولید شده R_i به ازای بعضی از $i \in J$ و هم چنین $K=\prod_{j\in J} K_j$، $K_i=I_i$، $K_j=R_j$ زمانی که $j \neq i$.در این صورت K نیز ایده آل متناهیا تولید شده S است.(حاصل ضرب هر تعداد ایده آل باز هم ایده آل است.) و هم چنین اگر $I_i \subseteq Z_l(R)$ انگاه $K \subseteq Z_l(S)$ است. بنابراین چون S ویژگی (A) را از سمت راست دارد، دنباله ی غیر بدیهی $\delta= < d_j > \in S$وجود دارد که $K\delta=0$.
زمانی که $j \neq i$ ، $K_j=R_j$ ، $d_j=0$ در R_j، در این صورت δ دنباله ی غیر صفر است. یعنی $d_i \neq 0$ در R_i. در هر حال $I_i d_i=0$ و در نتیجه R_i ویژگی (A) را از سمت راست دارد. به طور کلی در حلقه های جابجایی یک حلقه ی تحویل یافته ویژگی (A) را ندارند.

۴.۲ مثال:

فرض کنید حلقه ی $R=$ .... را داریم.کهF میدان دلخواه است. در این صورت R حلقه ی نوتری (راست و چپ) است.اما R ویژگی (A) را از راست و چپ ندارد. می توان دو ایده آل به صورت زیر ارائه نمود که $I \subseteq Z_l(R)$و$J \subseteq Z_r(R)$ است.اما a و b مخالف صفر وجود ندارد که $Ia=0$ و $bJ=0$.
حال می توان نتیجه گیری کرد زمانی که حلقه تحویل یافته یا نوتری باشد،ویژگی (A) را دارد. یک ایده آل اول P از حلقه ی R به طور تام اول نامیده می شود اگر به ازای هر a و b داشته باشیم :

$ab \in P \Longrightarrow a \in Pb \in P$

توجه کنید که در حلقه های تحویل یافته تمام ایده آل های اول می نیمال به طور تام اول هستند. اینک ما قادر هستیم که لم زیر را اثبات کنیم:

۵.۲ : لم

فرض کنید Rحلقه تحویل یافته و I یک ایده آل R باشد.اگر $I \subseteq P_1 \bigcup ...... \bigcup P_n$ و به ازای هر P_i ایده آل اول می نیمال باشد، در این صورت وجود دارد i ای که $I \subseteq P_i$.

برهان: اثبات به استقراء روی n است. حال فرض کنیم $n=2$ و $I \subseteq P_1 \bigcup P_2$.
فرض خلف: $I \subseteq P_1 I \subseteq P_2$ پس وجود دارد $x \in I$ که $x \notin P_1$ و $y \in I$ و هم چنین $y \in P_2$.

$$x \in I \longrightarrow x \in P_1 \bigcup P_2 \qquad (۳)$$

$$y \in I \longrightarrow y \in P_1 \bigcup P_2 \qquad (۴)$$

چون I ایده آل است،پس

$$x - y \in I \qquad (۵)$$

$$(۳) \longrightarrow x \in P_۱ \vee x \in P_۲ \Longrightarrow x \in P_۲$$

و هم چنین

$$(۴) \longrightarrow y \in P_۱ \vee y \in P_۲ \Longrightarrow y \in P_۱$$

در حالت $n =$ از شرط اول بودن P استفاده نشد.

$$(۵) \longrightarrow x - y \in P_۱ \vee x - y \in P_۲$$

که از اولی به دست می آید که $x \in P_۲$ و از دومی به دست می آید که $x \in P_۱$ که از هر دو تناقض به دست می آید.

فرض استقراء : حکم برای n برقرار است. اگر I زیر مجموعه اجتماع n ایده آل اول باشد، آن گاه I زیر مجموعه ی حداقل یکی از ایده آل های اول است.

حکم استقراء : اگر

$$I \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n+۱} P_i$$

آن گاه

$$\exists \qquad ۱ \leq i \leq n \qquad I_i \subseteq P$$

با توجه به فرض استقراء کافی است ثابت کنیم :

$$\exists j \qquad ۱ \leq j \leq n + ۱ \qquad I \subseteq \bigcup_{\substack{i=۱ \\ i \neq j}}^{n+۱} P_i$$

فرض کنیم چنین نباشد:

$$\forall j \qquad ۱ \leq j \leq n + ۱ \qquad I \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=۱ \\ i \neq j}}^{n+۱}$$

پس :

$$\forall j \qquad ۱ \leq j \leq n + ۱ \qquad \exists x_j \in I ; x_j \notin \bigcup_{\substack{i=۱ \\ j \neq ۱}}^{n+۱} P_i \qquad (۶)$$

حال با توجه به رابطه ی بالا می توان نوشت:

$$x_۱ \in I \longrightarrow x_۱ \in P_۱, \forall j \neq ۱ \qquad x_۱ \notin P_j$$
$$x_۲ \in I \longrightarrow x_۲ \in P_۲, \forall j \neq ۲ \qquad x_۲ \notin P_j$$
$$x_{n+۱} \in I \longrightarrow x_{n+۱} \in P_{n+۱}, \forall j \neq n+۱ \qquad x_{n+۱} \notin P_j$$

پس طبق تعریف ایده آل I $x_۱......x_n - x_{n+۱} \in I$
و در نتیجه $x_۱........x_n - x_{n+۱} \in \bigcup_{i=۱}^{n+۱} P_i$ در این صورت می توان نوشت:

$$\exists i; ۱ \leq i \leq n \qquad x_۱.....x_n - x_{n+۱} \in P_i \Longrightarrow ۱ \leq i \leq n; x_{n+۱}\ inP_i$$

که تناقض است.پس $x_۱....x_n - x_{n+۱} \in P_{n+۱}$.
چون $x_{n+۱} \in P_{n+۱}$ پس $x_۱.....x_n \in P_{n+۱}$ و در این صورت $P_{n+۱}$ ایده آل اول است. پس

$$\exists i; ۱ \leq i \leq n \qquad x_i \in P_{n+۱}.$$

۶.۲ قضیه :

اگر R حلقه ی کاهشی با تعداد متناهی ایده آل اول می نیمال باشد، در آن صورت R دارای ویژگی (A) است.

برهان :
a یک مقسوم علیه صفر حلقه ی R باشد. بنابراین یک ایده آل اول می نیمال شاملa موجود است.برای اینکه نشان دهیم $a \notin P$ برای تمام ایده آل های اول می نیمال P در R . قرار دهید

$$r_R(a) \subseteq P \Longrightarrow r_R(a) \subseteq P(R)$$

زمانی که R حلقه ی کاهشی باشد، در این صورت $P(R) = ۰$ و در نتیجه $r_R(a) = ۰$.
که تناقض است.قرار دهید

$$I = \sum_{i=۱}^{n} Ra_iR \subseteq Z_l(R)$$

با این فرض و مفروضات قبلی، I شامل یکه ....ایده آل اول می نیمال R است. با توجه به لم ۱/۵ بنابراین یک ایده آل می نیمال P از R موجود است که $I \subseteq P$ برای هر $a_i \in I \subseteq P$ وجود دارد $x_i \in R/P$ به طوری که $a_ix_i = ۰$................................ توجه کنید که $x_۱.......x_n \neq ۰$ زیرا P به طور کامل اول ....است و R حلقه ی کاهشی است. و $x_۱x_۲......a_ix_i......x_n = ۰$ و $a_ix_۱.......x_n = ۰$.................................. بنابراین $Ra_iRx_۱....x_n = ۰$ به ازای هر i در نتیجه $Ix_۱.....x_n = ۰$. بنابراین R ویژگی راست (A) را دارد. به همین روش R ویژگی چپ را نیز دارد.

۷.۲ گزاره :

فرض کنید R حلقه ی کاهشی با خاصیت $a.c.c$ بر روی پوچساز راست باشد. در این صورت R ویژگی (A) رادارد.

R............................ دارای فقط تعداد متناهی ایده آل اول می نیمال باشد این حکم را نتیجه می دهد.

باید توجه کنیم که در حلقه نیمه اول مضرب مشخصی سازی ....ایده آل اول می نیمال وجود دارد.
در حلقه جابجایی R ،هر ایده آل اول R که ماکزیمال باشد، در آن صورت R ویژگی R را دارد....................اما این مطلب در حلقه نیمه جابجایی همواره برقرار نیست.به عنوان مثال ۱.۴ هر ایده آل اول در حلقه R ماکزیمال است،اما ویژگی (A) را ندارد.

۸.۲ گزاره :

فرض کنید R یک حلقه ی برگشت پذیر باشد. اگر هر ایده آل اول R ماکزیمال باشد، در آن صورت R ویژگی (A) را دارد.

برهان : فرض کنید $I = \sum_{i=۱}^{n} Ra_iR \subseteq Z_l(R)$. در این صورت به ازای تعدادی از ایده آل های ماکزیمال P ازR داریم: $I \subseteq P$. توجه کنید که P ایده آل اول می نیمال است. اگر $I \subseteq P(R)$ باشد می توان نتیجه گرفت که I پوچ توان است.
به ازای بعضی از k_i صحیح مثبت که $i = ۱, ..., n$ قراردهید: $a_i^{k_i} = ۰$. زمانی که R برگشت پذیر باشد، در این صورت $(Ra_iR)^{k_i} = ۰$ هم چنین$I^K = ۰$ است زمانی که $K = \sum_{i=۱}^{n} k_i$
. فرض کنید s کوچکترین عدد مثبتی باشد که $I^s = ۰$. فرض کنید:
$۰ \neq I^{s-r} \subseteq r_R(I) = l_R(I)$
و قرار دهید $I \not\subseteq P(R)$ در این صورت $\bar{R} = R/P(R)$ توجه کنید که $\bar{R}$ کاهشی است، زمانی که $P(R)$ عضو مجموعه ی تمام اعضای پوچ توان در حلقه ی برگشت پذیر R باشد. حال در نظر بگیرید:

$$\bar{I} = (I + P(R))/P(R) \qquad \bar{P} = P/P(R)$$

هر جا که a_i لازم است،قرار دهید:

$$\forall i > t \qquad a_i \in P(R) \qquad\qquad a_۱....a_t \not\subseteq P(R)$$

که $1 \le t \le n$. پس به ازای هر$\bar{a_j} \in \bar{J} \subseteq \bar{P}$. زمانی که $1 \le j \le t$ وجود دارد که $\bar{x_j} \in \bar{R}/\bar{P}$ به طوری که $\bar{a_j}\bar{x} = \bar{0}$ .... زیرا $\bar{R}$ حلقه ی کاهشی و $\bar{P}$ ایده آل اول می نیمال است.توجه کنید $\bar{x_1}\bar{x_2}....\bar{x_t} \neq 0$. زیرا $\bar{P}$ به طور تام اول است. زمانی که $\bar{R}$حلقه ی کاهشی باشد داریم. $\bar{x_1}......\bar{a_j}\bar{x_j} = \bar{0}$ و $\bar{a_j}\bar{x_1}......\bar{x_t} = \bar{0}$
و هم چنین

$$\forall j \qquad 1 \le j \le t \qquad \bar{R}\bar{a_j}\bar{R}\bar{x_1}...\bar{x_t} = \bar{0}$$

قرار دهید : $\bar{b} = \bar{x_1}.....\bar{x_t}$ و سپس $Ib \subseteq P(R)$ و هم چنین $(Ib)^m = 0$ که m کوچکترین عددی است که $m \ge 1$.
اگر

$$m = 1 \Longrightarrow Ib = 0$$

و حکم به دست می آید.
فرض کنید $m \ge 2$ اگر $b(Ib)^{m-1} \neq 0$ حکم به دست می آید.
اگر

$$b(Ib)^{m-1} = 0 \Longleftarrow (Ib)^{m-1}b = 0$$

زیرا R کاهشی است. حال اگر همین روش را با توان های کاهشی ادامه دهیم داریم: $Ib^m = 0$ زمانی که $b \notin P(R)$ ، b پوچ توان نیست،زمانی که R برگشت پذیر است و بنابراین $b^m \neq 0$ ودر نتیجه R ویژگی راست (A) را دارد. به همین روش R ویژگی چپ(A) را دارد.

۹.۲ گزاره:

اگر R حلقه کاهشی باشد که ایده آل های اول آن ماکزیمال هستند، در آن صورت R ویژگی (A) را دارد.

برهان: در .... چپ (به عنوان مثال $r_R(M) \neq 0$ به ازای تمام ایده آل های چپ ماکزیمال M در R)ویژگی (A) را دارد. توجه کنید که R حلقه شبه فروبنیوسی

است اگر و فقط اگرR حلقه ی نوتری راست و پوچساز دو طرفه باشد و به ازای هر ایده آل چپ I و ایده آل راست J ، R داشته باشیم: $r_R(l_R(J)) = J \qquad l_R(r_R(I))I = I$
که نتیجه می دهد حلقه ی شبه فروبنیوسی راست و چپ کاهشی است و هم چنین ویژگی (A) را دارد. حال می توان به این امر توجه کرد که اگر حلقه Rخود القایی باشد در آن صورت $l_R(r_R(A)) = A$ به ازای ایده آل های چپ متناهیا تولید شده R می باشد.

زمانی که حلقه شبه فروبنیوس نوتری راست و خود القایی راست باشد، در این صورت به طور طبیعی حدس زده می شود که حلقه ی خود القایی راست ویژگی (A) را دارد.

۱۰.۲ مثال:

فرض کنید V فضای برداری روی میدان F با اعضای قابل شمارش باشد. قرار دهید $L = end_F(V)$ اندومورفیسم حلقه V باشد. فرض کنید V راست مدول R باشد. دراین صورت R خود القای راست فون نویمان حلقه منظم است. در این صورت R ویژگی راست (A) را ندارد.

در ابتدا توجه کنید که ایده آل های R عبارت است از

$$\{\text{۰}\} \qquad I = \{f \in R : rank(Imf) < \infty\}$$

اگر $I \ni a \neq \text{۰}$ در آن صورت $I = RaR$. (زمانی کهR فون نویمان منتظم باشد).به ازای هر $x \in I$ داریم: $Rx = Re$ به ازای بعضی از $e \in R$ که $e^{\text{۲}} = e$. در این صورت$x = xe$ و در این صورت $x(\text{۱}-e) = \text{۰}$. این نتیجه می دهد که $I \subseteq Z_l(R)$. حال اگر $xR = fR$ به ازای بعضی از f های خود توان و در نتیجه $(\text{۱} - f)x = \text{۰}$ که این نتیجه می دهد که $I \subseteq Z_r(R)$. که هیچ مقسوم علیه $b, c \in R$ وجود ندارد که $Ib = cI = \text{۰}$ بنابراین R ویژگی (A) را ندارد.

۱۱.۲ گزاره:

حلقه نامنظم R ویژگی (A) را دارد.

برهان: قرار دهید $I = \sum_{i=\text{۱}}^{m} Ra_iR \subseteq Z_l(R)$ با فرض $Ra_{\text{۱}}R = e_{\text{۱}}R$ به ازای عضو خود توان در $e_{\text{۱}}$ ، R. توجه کنید $I = Re_{\text{۱}} \oplus I(\text{۱} - e_{\text{۱}})$. در این صورت

$$I(\text{۱} - e_{\text{۱}}) = \sum_{i=\text{۲}}^{n} Ra_i(\text{۱} - e_{\text{۱}})R.$$

توجه کنید $I(\text{۱} - e_{\text{۱}}) = Re_{\text{۲}} \oplus I(\text{۱} - e_{\text{۱}})(\text{۱} - e_{\text{۲}})$.
زمانی که $Ra_{\text{۲}}(\text{۱} - e_{\text{۱}})R = e_{\text{۲}}R$ به ازای عضو خود توان اصلی $e_{\text{۲}}$.
اگر همین روش را ادامه دهیم در این صورت : $I = \oplus_{i=\text{۱}}^{n} Re_i$ قرار دهید : $f = \sum_{i=\text{۱}}^{n} e_i$ در این صورت $f^{\text{۲}} = f \neq \text{۱}$ و هم چنین $I = Rf$. بنابراین $I(\text{۱} - f) = \text{۰}$. زمانی که $\text{۱} - f \neq \text{۰}$. بنابراین R ویژگی راست (A) رادارد.به همین روش می توان نشان داد که R ویژگی چپ (A) را نیز دارد.

۱۲.۲ گزاره:

اگر R هر کدام از شرایط $(۴)-(۱)$ را داشته باشد، در این صورت R ویژگی (A) را دارد:

۱. R حلقه ی منظم قوی است(حلقه ی کاهشی فون نویمان منظم)

۲. R حلقه ی چپ ضعیف است $(Ra = RaRaa \in R)$. با خاصیت $(a.c.c)$ پوچساز راست.

۳. R حلقه ی فون نویمان یک به یک با چند جمله ای همانی است.

۴. R حلقه ی منظم فون نویمان با خاصیت .... و هر ایده آل اول R ماکزیمال است.

برهان: (۱) با توجه به تعریف برقرار است. (۲) با توجه به $(۲/۴,۸)$ .... (۳) .... (۴)............. مثال ۱/۱۰ نشان می دهد که شرط ....در

قسمت (۳) ، شرط لازمی است.هم چنین مثال ....نشان می دهد که شرط یک به یک بودن R در قسمت ....لازم است.

۱۳.۲ مثال:

F میدان است.قرار دهید $F_n = F$ به ازای ..... $n = ۱,۲,$ قرار دهید:
$S = \langle \bigoplus_{i=۱}^{\propto} F_i, <۱> \rangle$ $K = \bigoplus_{i=۱}^{\propto} F_i$ که F - زیر جبر $\prod_{i=۱}^{\propto} F_i$ است که توسط $\bigoplus_{i=۱}^{\propto} F_i$ و $<۱>$ تولید می شود. و $<۱>$ که عضو همانی $\prod_{i=۱}^{\propto} F_i$ است. قرار دهید حلقه ی R با

$$\begin{bmatrix} S & K \\ K & S \end{bmatrix}$$

R حلقه ی منظم فون نویمان .... است. با چند جمله ای همانی. و توجه کنید که R حلقه ی اول نیست. قرار دهید:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} <۱,۰,۰,.....> & ,<۰> \\ <۰> & <۰> \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} <۰,۱,۰,.....> & <۰> \\ <۰> & <۰> \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $a,b \neq ۰$. اما $aRb = ۰$ زمانی که ۰ ماتریس صفر در R است. حال نشان می دهیم که R ویژگی راست (A) را ندارد.قرار دهید:

$$\alpha = \begin{bmatrix} < ۱ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < ۰ > \end{bmatrix} \in R$$

توجه کنید که

$$\mathbf{R}\alpha\mathbf{R} = \begin{bmatrix} S & K \\ K & K \end{bmatrix}$$

قرار دهید

$$\beta = \begin{bmatrix} < a_i > & < b_i > \\ < c_i > & < d_i > \end{bmatrix}$$

که عضو غیر صفر در $R\alpha R$است. در این صورت $< b_i >, < c_i >, < d_i > \in K$.
و بنابراین عدد صحیح مثبتی مانند $t \geq ۱$ وجود دارد به طوری که $b_j = c_j = d_j = ۰$.
به ازای هر $j \geq t$ ، قرار دهید:

$$\gamma = \begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < e_j > \end{bmatrix}$$

زمانی که $e_j =< ۰, ۰, ..., ۱, ۰, ... >$ که j امین آرایه برابر L و $t < j > t$.
قرار دهید:

$\beta\gamma = ۰ = \gamma\beta$

بنابراین $R\alpha R \subseteq Z_l(R)$. در این صورت $(R\alpha R)\delta = ۰$ به ازای بعضی از عناصر ناصفر$\delta \in R$.
حال قرار دهید:

$$\delta = \begin{bmatrix} < x_i > & < y_i > \\ < z_i > & < w_i > \end{bmatrix}$$

پس:

$$(\mathbf{R}\alpha\mathbf{R})\delta = \begin{bmatrix} S & K \\ K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < x_i > & < y_i > \\ < z_i > & < w_i > \end{bmatrix} = ۰$$

زمانی که

$$\begin{bmatrix} < ۱ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < ۰ > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < x_i > & < y_i > \\ < z_i > & < w_i > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < x_i > & < y_i > \\ < ۰ > & < w_i > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < ۱ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < ۰ > \end{bmatrix}$$

که حاصل آن متعلق است به $R\alpha R$ بنابراین $< x_i >=< y_i >= ۰$ زمانی که $< z_i > \in K$ عدد مثبت صحیحی وجود دارد که مانند $t_z \geq ۱$ که $z_i = ۰$ به ازای

تمام $i \geq t_z$. حال اگر $S \ni < w_i >$ بنابراین $< w_i > = < w_۱, ...w_n, w, ... >$ به ازای بعضی از اعدادمثبت $n \geq ۱$. قرار دهید: $< u_i > = < ۰, ۰, ..., ۱, ۰ >$ با فرض اینکه $(n + ۱)$ ام عنصر برابر ۱ است. در این صورت:

$$\begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < u_i > \end{bmatrix}$$

و هم چنین

$$\begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < u_i > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < z_i > & < w_i > \end{bmatrix} = ۰$$

زمانی که $w = ۰$ فرض کنید $m = maxt_z, n$ قرار دهید:

$$\begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < v_i > \end{bmatrix} \in R\alpha R$$

زمانی که $< v_i > = < ۱, ..., ۱, ۰, ۰.. >$ با این شرط که $v_i = ۰$ به ازای تمام $i \geq m + ۱$. پس

$$\begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < ۰ > & < u_i > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < z_i > & < w_i > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < ۰ > & < ۰ > \\ < z_i > & < w_i > \end{bmatrix} = ۰$$

در نتیجه $< z_i > = < w_i > = < ۰ >$ با فرض $\delta = ۰$. که نشان می دهد R ویژگی راست (A) را ندارد. به هر باید به یاد داشته باشیم که ایده آل $R\alpha R$ ، R نمی تواند به وسیله ی عضو خود توان مرکزی تولید شود. بنابراین R نامنظم و در نتیجه خود القا ....

۳ توسیع حلقه با ویژگی (A)

در این بخش توسیع حلقه با ویژگی (A) را مطالعه می کنیم که مثال های متعددی از حلقه ها با ویژگی (A) را فراهم می کند. ابتدا حلقه ی ماتریس روی حلقه ها با ویژگی (A) را بررسی می کنیم.

۱.۳ قضیه:

اگر حلقه ی R ویژگی راست (A) را داشته باشد. در این صورت حلقه ی $M_n(R)$ روی R ویژگی راست (A) را به ازای هر $n \geq ۱$ را دارد.

برهان: فرض کنید: e_{ij} ماتریس همانی معمولی باشد. و $A_k \in M_n(R)$ و نشان می دهیم:

$X = \sum_{k=۱}^{m} M_n(R)A_kM_n(R) \subseteq Z_l(M_n(R))$

عنصر (i,j) ام A_k را با a_{ij}^k نشان می دهیم. ما نشان می دهیم که

$J = \sum_{i,j,k} Ra_{ij}^kR \subseteq Z_l(R).$

قرار دهید $a \in J$ و $a = \sum_{t=۱}^{s} r_ta_{ij}^ks_t$ به ازای تعدادی $r_t, s_t \in R$ که $۱ \leq t \leq s$.
تعریف کنید: $A = \sum_{t=۱}^{s}\sum_{d=۱}^{n} r_te_{d_i}A_{k_t}e_{jd}s_t$ در این صورت
$A \in X \subseteq Z_lM_n(R))$................. که نتیجه می شود:

$A = \sum_{d=۱}^{n}\sum_{t=۱}^{s} r_te_{di}a_{ij}^{k_t}e_{ij}e_{jd}s_t = \sum_{d=۱}^{n} e_{dd}\sum_{t=۱}^{s} r_ta_{ij}^{k_t}s_t = aI_n.$

(I_n ماتریس همانی است.) در این صورت $aI_n = A \in Z_l(M_n(R))$ که نتیجه می دهد که $a \in Z_l(R)$. بنابراین $J \subseteq Z_l(R)$. زمانی که R ویژگی راست (A) را دارد، $Ju = ۰$ به ازای عضو غیر صفر$u \in R$. توجه کنید که $X(uI_n) = ۰$. بنابر این$M_n(R)$ ویژگی راست (A) را دارد.

مثال زیر به خوبی نشان می دهد که ویژگی (A) ....

۲.۳ مثال :

حلقه ی R با ویژگی (A) که دارای خاصیت eRe است، اما به ازای تعدادی از اعضای خودتوان $R \ni e = e^۲$ دارای ویژگی (A) نیست.F میدان و ....R=
که حلقه ی شبه فروبنیوسی .... در این صورت R ویژگی (A) را

دارد..................... حال قرار دهید $e = e_{۱۱} + e_{۲۲} + e_{۴۴} + e_{۵۵} \in R$ که e_{ijs} ماتریس واحد است.پس $e^۲ = e$ و در نتیجه :

$$eRe \cong \begin{bmatrix} F & F \\ ۰ & F \end{bmatrix}$$

ولی با توجه به مثال ....eRe ویژگی (A) را ندارد.

۱. نکته: حال سوالی مطرح می شود حلقه ی بائر یا شبه بائر چه موقع دارای ویژگی (A) هستند؟
حلقه در مثال ....بائر و شبه بائر است که ویژگی (A) را ندارند.هم چنین حلقه با ویژگی (A) همیشه بائر نیست. در قضیه ۱ /۲ $M_۲(Z[x])$ ویژگی زاست (A) را دارد. اما به خوبی معلوم است که $M_۲(Z[x])$ بائر نیست.

با توجه به مثال ۴ /۲ و قضیه۱ /۲ می توان نوشت که زیر حلقه ی یک حلقه با ویژگی راست (A) حتما دارای ویژگی راست (A) نیست.
به هر حال داریم .... = R_n زمانی که $n \geq ۱$ یک عدد صحیح مثبت است.

۳.۳ قضیه:

فرض کنید $n \geq ۱$ و حلقه ی R ویژگی (A) را دارد،اگر و فقط اگر حلقه ی R_n ویژگی راست (A) را داشته باشد.

برهان: کافی است حالت $n = ۲$ را بررسی کنیم که بقیه ی حالت ها را می توان با همان روش بررسی نمود. فرض کنید R ویژگی راست (A) را داشته باشد، قرار دهید:

$$X = \sum_{i=۱}^{m} R_۲ A_i R_۲ \subseteq Z_l(R_۲) \quad A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ ۰ & a_i \end{bmatrix}$$

به ازای هر i و $r_{ij}, s_{ij} \in R$ و داریم:

$$\begin{bmatrix} r_{ij} & e \\ ۰ & r_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ ۰ & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{ij} & ۰ \\ ۰ & s_{ij} \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

قرار دهید...

بنابراین عضو غیر صفر

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

وجود دارد که:

$$X \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = 0$$

که نتیجه می دهد:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} Ra_iR \subseteq Z_l(R)$$

زمانی که R ویژگی راست (A) را داشته باشد و $Yu = 0$ به ازای عضو غیر صفر $u \in R$. توجه کنید که

$$X \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. بنابراین R_2 ویژگی راست (A) را دارد. قرار دهید:

$X_0 = \sum_{i=1}^{m} RaR \subseteq Z_l(R)$

اگر قرار دهید: $X = \sum_{i=1}^{m} R_2A_iR_2$ زمانی که :

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$X = \{ \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & b \end{bmatrix} : b, c \in X\}$$

قرار دهید

$$A = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

که عضو غیر صفر در X باشد.

فرض کنید که $0 \neq b$ زمانی که $b \in X$. در این صورت $0 \neq a \in R$ وجود دارد که $ba = 0$. بنابراین:

$$A \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

که نتیجه می دهد $A \in Z_l(R_۲)$
فرض کنید $b = ۰$و $c \neq ۰$ که $c \in X$. در این صورت عضو غیر صفر $v \in R$ موجود است به طوری که $cv = ۰$. در نتیجه

$$A \begin{bmatrix} v & ۰ \\ ۰ & v \end{bmatrix} = ۰$$

بنابراین $A \in Z_l(R_۲)$ که نتیجه می شود: $X \subseteq Z_l(R_۲)$. زمانی که $R_۲$ ویژگی راست (A) را داشته باشد. عضو غیر صفر

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ ۰ & \alpha \end{bmatrix} \in R_۲$$

موجود است که $XB = ۰$
اگر $\alpha \neq ۰$ به ازای $b \in X$. در این صورت :

$$\begin{bmatrix} b & c \\ ۰ & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ ۰ & \alpha \end{bmatrix} = ۰$$

زمانی که

$$\begin{bmatrix} b & c \\ ۰ & b \end{bmatrix} \in X$$

بنابراین $b\alpha = ۰$ و $X.\alpha = ۰$
اگر $\alpha = ۰$ و $\beta \neq ۰$ داریم:

$$\begin{bmatrix} b & c \\ ۰ & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & \beta \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = ۰$$

بنابراین $b\beta = ۰$ و در نتیجه $X.\beta = ۰$بنابراین R ویژگی راست (A) را دارد.

فرض کنید R یک حلقه و (R, R) یک بای مدول M باشد. یک توسیع R بر روی حلقه ی $T(R, M) = R \oplus M$ با جمع و ضرب معمولی به صورت زیر است:

$$(r_۱, m_۱)(r_۲, m_۲) = (r_۱r_۲, r_۱m_۲ - r_۲m_۱)$$

که ایزومورفیسم حلقه روی تمام ماتریس های

$$\begin{bmatrix} r & m \\ ۰ & m \end{bmatrix}$$

است، زمانی $r \in R$ و $m \in M$ و همان عمل معمولی جمع و ضرب ماتریس برقرار است. در قضیه .... حلقه ی R ویژگی راست (A) را دارد. اگر و فقط اگر توسیع $T(R,R)$ حلقه R ویژگی راست (A) را داشته باشد. اما حلقه ی R و بای مدول (R,R) دارای ویژگی راست (A)ولی توسیع $T(R,M)$ از R ویژگی راست (A) را ندارد.

مثال : با هم نگاهی دوباره به مثال ....می اندازیم.F میدان و $R=$ $F[x,y]$ حلقه ی چند جمله ای ها روی F با ....جابجایی x,y باشد.قرار دهید: $A=\oplus_p \frac{R}{(p)}$ که p برروی عناصر اول R و (p) ایده آل اول R که توسط p تولید می شود.

توجه کنید .... توسیع R توسط A

$$T=T(R,A)=\{\begin{bmatrix} r & <\bar{a_p}> \\ ۰ & r \end{bmatrix} r \in R, <\bar{a_p}> \in A\}$$

که

$$\bar{a_p}=a_p+<p>$$

x,y اعداد اول در R هستند.قرار دهید $I=(x,y)$ که ایده آل R است که توسط x,y تولید می شود. و هم چنین $I \neq R$ و

$$I \subseteq l_R(A)=\{r \in R : rc=۰ \exists \quad c \in A\}$$

و $۰ \neq \alpha \in I$

قرار دهید: $\alpha=c_۱x+c_۲y=p_۱p_۲....p_n$ زیرا Rیک UFD است.بنابراین $\alpha =<.....\bar{۰}, ۱+(p_۱), ..., ۱+(p_n), \bar{۰}, ...>=۰$ و $\alpha \in l_R(A)$

$$J=IT=\{\sum \begin{bmatrix} \alpha & <\bar{۰}> \\ ۰ & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & <\bar{a_p}> \\ ۰ & r \end{bmatrix} : \alpha \in I, r \in R, <\bar{a_p}> \in A\}$$

=

$$\{\sum \begin{bmatrix} \alpha r & \alpha <\bar{a_P}> \\ ۰ & \alpha r \end{bmatrix} \alpha \in I, r \in R, <\bar{a_p}> \in A\}$$

در این صورت J یک ایده آل با تولید متناهی است و $J \subseteq Z_l(T)$ حال

$$\begin{bmatrix} \gamma & <\bar{c_p}> \\ ۰ & \gamma \end{bmatrix} \in J$$

در این صورت $\gamma \in I \subseteq l_R(A)$
اگر $0 \neq \gamma$ بنابراین $< \bar{0} > = < \bar{d_p} > \gamma$ به ازای بعضی از عناصر ناصفر $< \bar{d_p} > \in A$ در این صورت

$$\begin{bmatrix} \gamma & < \bar{c_p} > \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & < \bar{d_p} > \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

که ۰ عنصر صفر در T است.

اگر $\gamma = 0$ در این صورت

$$\begin{bmatrix} \gamma & < \bar{c_p} > \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & < \bar{1} > \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ودر نتیجه $J \subseteq Z_l(T)$.

حال نشان می دهیم که $r_T(J) = 0$

اگر

$$\begin{bmatrix} \beta & < \bar{b_p} > \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in r_T(J)$$

در این صورت

$$\begin{bmatrix} x & x < \bar{b_p} > \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & < \bar{b_p} > \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = 0$$

بنابراین $x\beta = 0$ و هم چنین $x < \bar{b_p} > + x < \bar{a_p} > \beta = < \bar{0} >$ که نتیجه می دهد $\beta = 0$ و در نتیجه $x < \bar{b_p} > = < \bar{0} >$ که این نتیجه می دهد که $xb - p \in (p)$ به ازای هر p.
اگر $x \neq p$ داریم: $b_p \in (p)$ ودر نتیجه $< \bar{b_p} > = (\dots, 0, b_x + 0, \bar{0}, \dots)$ و هم چنین

$$\begin{bmatrix} y & y < \bar{a_p} > \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & < \bar{b_p} > \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & < \bar{0} > \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$< \dots \bar{0}, b_x + (x), \bar{0} \dots > = < \bar{0} >$$

و هم چنین $yb_x \in (x)$. زمانی که $y \notin (x)$ و $b_x \in (x)$ و در نتیجه

$$< \bar{b_p} > = < \bar{0} >$$

هنگامی که

$$\begin{bmatrix} \beta & <\bar{b_p}> \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = ۰$$

که نتیجه می دهد که T ویژگی (A) را ندارد. قرار دهید:

$$V_n(R) = [......]$$

که $۱ \geq n$عدد صحیح مثبتی است.و حلقه ی V_n زیر حلقه ی R_n است. به همین روش اثبات قضیه .... را داریم.

۴.۳ گزاره:

قرار دهید $n \geq ۱$. حلقه ی R ویژگی راست (A) را دارد $\Longleftrightarrow$ $V_n(R)$ ویژگی راست (A) را داشته باشد.

برهان: باتوجه به .... قرار دهید:$RA = \{ra : r \in R\}$ به ازای هر $A \in M_n(R)$

و به ازای $n \geq ۰$ قرار دهید: $V = \sum_{i=۱}^{n-۱} e_{i(i+۱)}$ زمانی که $e_{ij}S$ ماتریس واحد است. و به ازای عدد صحیح $n \geq ۱$ داریم: $V_n(R) = RI_n + RV + ... + RV$ تعریف کنید:

$$\rho : V_n(R) \longrightarrow \frac{R[x]}{(x^n)}$$

با ضابطه ی:

$$\rho(a_۰ I_n + a_۱ V + ... + a_{n-۱} V^{n-۱}) = \sum_{i=۰}^{n-۱} a_i x^i + (x^n)$$

در این صورتρ یک ایزومورفیسم حلقه است. که در این صورت نتیجه ی زیر را داریم.

۵.۳ نتیجه:

$۱ \geq n$حلقه ی R ویژگی راست (A) رادارد $\Longleftrightarrow$ $\frac{R[x]}{(x^n)}$ ویژگی راست (A) را داشته باشد.

حال حلقه ی چند جمله ای ها با ویژگی (A) را بررسی می کنیم."هوکابا" و "کلر" ثابت کردند که اگر R حلقه ی ....جابجایی باشد،در آن صورت R ویژگی (A) را دارد................. حلقه ی چند جمله ای های $R[x]$ روی هر حلقه ی جابجایی R ویژگی (A) رادارد.به هر حال این خاصیت در مورد حلقه ی ناجابجایی روی حلقه ی نیم ابتدایی که چند جمله ای ثابت داشته باشد، برقرار نیست.

۶.۳ مثال:

حلقه ی $\mathbf{Z}_۲$ حلقه به پیمانه ی عدد صحیح ۲ باشد.در نظر بگیرید:

$$R = \{< a_i >: a_i \in M_۲(\mathbf{Z}_۲); a_i \in \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_۲ & \mathbf{Z}_۲ \\ ۰ & \mathbf{Z}_۲ \end{bmatrix}\}$$

دراین صورت R حلقه ی نیم ابتدایی با چند جمله ای ثابت است. حلقه ی چند جمله ای $R[x]$ را روی R در نظر می گیریم. توجه کنید:

$$R[x] = \{< f_i >: f_i \in M_۲(\mathbf{Z}_۲[\mathbf{x}_۲]), f_i \in \begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_۲)[x_۲] & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\}$$

قرار دهید:

$$\alpha =< \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} ...... >\in R$$

توجه کنید:

$$R[x]\alpha R[x] = \{< f_i >: f_i \in M_۲(\mathbf{Z}_۲[\mathbf{x}_۲]); f_i \in \begin{bmatrix} ۰ & (\mathbf{Z}_۲[\mathbf{x}_۲]) \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\}$$

در نظر بگیرید: $< f_i >\in R[x]\alpha R[x]$ و عدد مثبت $n \geq ۱$ وجود داردکه

$$f_i \in \begin{bmatrix} ۰ & (\mathbf{Z}_۲[\mathbf{x}_۲]) \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

به ازای $i \geq n$ و هم چنین $< g_i >\in R[x]$ را در نظر بگیرید که

$$\forall k \geq n + ۱ \quad g_۱ = ... = g_n = ۰$$

$$g_k = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $<0>=<g_i><f_i>$ که $<0>$ عنصر صفر $R[x]$ است.بنابراین $<f_i>\in Z_l(R[x])$ و در نتیجه $R[x]\alpha R[x]\subseteq Z_l(R[x])$.

نشان می دهیم که عضو غیز ضفر $h\in R[x]$ ندارد که $<0>=R[x]\alpha R[x]h$) ثابت کنید که: $<0>=R[x]\alpha R[x]h$) به ازای بعضی عناصر غیر صفر $h\in R[x]$.

قرار دهید $h=<h_k>\in R[x]$ پس عضوصحیح مثبت وجود دارد که $t\geq 1$ به طوری که

$$h_k\in\begin{bmatrix}(\mathbf{Z_2[x]}) & (\mathbf{Z_2[x]})\\ 0 & (\mathbf{Z_2[x]})\end{bmatrix}$$

به ازای $k\geq t$.و هم چنین $E_i=<0,.....e_i,......>$ زمانی که

$$e_i=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

و به ازای هر $i\geq 1$ و $E_i\in R[x]\alpha R[x]$
و

$$E_ih=<0,.....h_i,......>=<0>$$

در نتیجه $h_i=0$ و $h=0$ که تناقض است.بنابراین $R[x]$ وِیژگی زاست (A) را ندارد.باهمین روش ویژگی چپ (A) رانیز ندارد.با همین روش بالا R ویژگی (A) را ندارد.با توجه به مثال .... اینک طبیعی است که سوالات زیر مطرح شود:

- اگر R .... راست باشد.در آن صورت حلقه ی $R[x]$ ویژگی راست (A) را دارد؟
- اگر حلقه یR ویژگی راست (A) را داشته باشد آیا حلقه ی $R[x]$ ویژگی راست (A) را دارد؟

۲. نکته: حلقه ی R وجود دارد که ویژگی (A) را ندارد ولی حلقه ی چند حمله ای $R[x]$ ویژگی (A) رادارد. حلقه ی چند جمله ای $R[x]$ روی هر حلقه ی جابجایی R ویژگی (A) رادارد........................ و حلقه ی جابجایی R وجود دارد که ویژگی (A) را ندارد

۷.۳ لم:

برای حلقه ی R،حلقه $R[x]$ ویژگی راست (A) رادارد $\Longleftrightarrow$

$r_R[x](f(x)R[x] \neq 0$ و $f(x)R[x] \subseteq Z_l R[x])$

برهان: قرار دهید

$I = \sum_{i=1}^{k} R[x] f_i(x) R[x] \subseteq Z_l(R[x])$

که

$f_i(x) = a_{i0} + a_{i1} + ... + a_{in_i} x^{n_i}$

و $g(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) x^{n_1 + ...n_{i-1}+1} \in I$ که $n_0 = 0$.
بنابراین $g(x)R[x] \subseteq I$. با فرض

$r_R[x](g(x)R[x]) = r_R[x](R[x]g(x)R(x)) \neq 0$

با توجه به قضیه اصلی .... و یا ....

$r_R[x](R[x]g(x)R[x]) \cap R \neq 0$

بنابراین $(R[x]g(x)R[x])V = 0$ به ازای عناصر ناصفر $r \in R$ ،زمانی که $Rg(x)R \subseteq R[x]g(x)R[x]$ و $f_i(x) = a_{i0} + a_{i1} + ... + a_{in_i} x^{n_i}$و $(Ra_{ij}R)r = 0$. بنابراین $I_r = (\sum_{i=1}^{k} R[x] f_i(x) R[x])r = 0$. در نتیجه $R[x]$ ویژگی راست (A) را دارد......................

حال ما حلقه ی چند جمله ای با ویژگی (A) را روی حلقه در نظر می گیریم.

۸.۳ تعریف:

حلقه ی R نیمه جابجایی گفته می شود اگر $a, b \in R$ و $ab = 0$ نتیجه دهد که $aRb = 0$.

حلقه ی کاهشی و حلقه ی برگشت پذیر حلقه های نیمه جابجایی هستند، اما عکس آن همیشه برقرار نیست.

۳. نکته: حلقه ی R کاهشی است $\Longleftrightarrow$ $R[x]$کاهشی باشد.
با توجه به.............................. حلقه ی نیمه جابجایی وجود دارد که حلقه ی چندجمله ای آن نیمه جابجایی نیست.اخیرا "نلسون"............................ تعریف جدیدی برای "حلقه ی مک کوی "ارائه داد.

۹.۳ تعریف:

حلقه ی R مک کوی راست است، زمانی که $f(x)g(x) = ۰$ روی حلقه ی $R[x]$ جایی که $f(x) \neq ۰$ و $g(x) \neq ۰$ نتیجه دهد که عنصر غیر صفر $r \in R$ وجود دارد به طوری که $f(x)r = ۰$. حلقه ی مک کوی چپ نیز همین گونه تعریف می شود.حلقه های مک کوی حلقه های چپ و راست هستند.به خوبی روشن است که حلقه های جابجایی همیشه مک کوی هستند................. ولی این مطلب در مورد حلقه های ناجابجایی صحیح نیست........... "نیلسون ...." ثابت کرد: اگر R حلقه ی برگشت پذیر باشد، در آن صورت حلقه ی مک کوی راست است. اما حلقه ی نیمه جابجایی وجود دارد به طوری که مک کوی راست نیست.....................

۱۰.۳ تعریف:

حلقه ی R آرمندرایز است اگر $a_i b_j = ۰$ به ازای هر i و j و چند جمله ای $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ در حلقه ی $R[x]$ نتیجه دهد که $f(x)g(x) = ۰$.................

۱۱.۳ گزاره:

R حلقه ی مک کوی راست است اگر R ویژگی راست (A) داشته باشد، در آن صورت حلقه ی چند جمله ای $R[x]$ ویژگی راست (A) رادارد

. برهان: قرار دهید $f(x) = \sum_{i=۰}^{k} a_i x^i \in R[x]$ و هم چنین $X = R[x]f(x)R[x] \subseteq Z_l(R[x])$. ایده آل I را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$I = \sum_{i=۰}^{k} Ra_iR$ و I $\ni \sum_{j=۰}^{N} r_j a_{ij} s_j \neq ۰$ را ثابت در نظر می گیریم ، زمانی که $a_{ij} \in \{a_۰, a_۱, ..., a_k\}$ و $r_j, s_j \in R$ به ازای هر j و هم چنین $g(x) = \sum_{j=۰}^{N} r_j f(x) s_j x^{j(k+۱)}$