فصل اول

۱ تعاریف اولیه

۱.۱ ایده آل

ایده آل :زیرمجموعه ی ناتهی I از حلقه ی R یک ایده آل چپ (راست) است $\Longleftrightarrow$

$\forall a, b \in I \qquad r \in R$

$$a, b \in I \Longrightarrow a - b \in I \qquad (۱)$$

$$a \in I, r \in R \Longrightarrow ra \in I (ar \in I) \qquad (۲)$$

۲.۱ ایده آل اول

ایده آل اول: فرض کنید P ایده آل حلقه تعویض پذیر R باشد، P را اول گوییم هرگاه :

- P ایده آل واقعی باشد
- $\forall a, b \in P ab \in P \Longrightarrow a \in P \vee b \in P$

۳.۱ ایده آل اولیه چپ(راست)

ایده آل P از حلقه اولیه چپ(راست) است، اگر حلقه خارج قسمتی R/P یک حلقه اولیه چپ(راست) باشد.

۴.۱ ایده آل اول می نیمال

R حلقه یکدار باشد. ایده آل اول P در R یک ایده آل اول می نیمال ایده آل I نام دارد. اگر $I \subset P$ باشد و ایده آل اولی چون $\acute{P}$ موجود نباشد که $I \subset \acute{P}$

۵.۱ ایده آل پوچ توان

ایده آل I ازحلقه ی R پوچ توان باشد. یعنی به ازای عدد صحیحی مانند n بتوان نوشت: $I^n = ۰$

۶.۱ ایده آل اولیه:

یده آل $q(\neq R)$ در حلقه ی تعویض پذیر R اولیه است، اگر به ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم
به ازای $n > ۰$ $\qquad a \in q \wedge ab \in q \Longrightarrow b^n \in q$

۷.۱ حلقه ی ساده

R حلقه ی ساده است، اگر $R^۲ \neq ۰$. و R ایده آل (دوطرفه) حقیقی نداشته باشد.

۸.۱ حلقه ی اول

R حلقه ی اول است، اگر ایده آل صفر یک ایده آل اول باشد، هر گاه I و J ایده آل هایی باشند به طوری که $IJ = ۰ \Longleftarrow I = ۰ \vee J = ۰$

۹.۱ حلقه ی نیمه اول

Rحلقه ی نیمه اول نامیده می شود، اگر دارای رادیکال اول صفر باشد و یا به عبارت دیگر حلقه ای است که نسبت به رادیکال اول نیمه ساده باشد.

۱۰.۱ رادیکال اول

اگر Rحلقه باشد، اشتراک تمام ایده آل های اول R را رادیکال اول گویند و با $P(R)$ نشان می دهند.هر گاه R ایده آل اول نداشته باشد در آن صورت اشتراک تمام ایده آل های اول برابر ایده آل می نیمال است. یعنی $P(R) = P$.با توجه به تعریف رادیکال اول در حلقه ی نیمه اول $P(R) = ۰$ است.

قضیه حلقه ی Rنیمه اول است $\Longleftrightarrow$ R ایده آل پوچ توان ناصفر نداشته باشد.

۱۱.۱ عنصر پوچ توان

یک عنصر حلقه R پوچ توان است اگر به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، $a^n = ۰$

۱۲.۱ رادیکال جیکپسون

اشتراک تمام ایده آل های اول (اولیه)را رادیکال جیکبسون می گویند.در واقع رادیکال اول همان رادیکال جیکبسون است.

۱۳.۱ پوچساز(صفرساز)

اگر Rحلقه ی تعویض پذیر باشد. در این صورت به ازای هر $b \in B$،$I = \{r \in R | rb = ۰\}$ یک ایده آل R است، که پوچساز نامیده می شود.

۱۴.۱ مقسوم علیه صفر

عنصر غیر بدیهی (ناصفر) a در حلقه R مقسوم علیه صفر است اگر عنصر ناصفری مانند $b \in R$ به طوری که موجود باشد $ab = ۰$ ($ba = ۰$)

۱۵.۱ زیرمجموعه بسته ضربی

زیر مجموعه بسته ضربی می گویند هرگاه:

$(۱) ۱ \in S$
$(۲) \forall a, b \in S \Longrightarrow ab \in S$

۱۶.۱ حلقه خارج قسمتی کسرها

Sزیر مجموعه ی بسته ی ضربی از حلقه ی تعویض پذیر R است. رابطه ی هم ارزی روی مجموعه ی $R * S$ به صورت مقابل تعریف می کنیم:

$$(r, s) \sim (\acute{r}, \acute{s}) \longleftrightarrow \exists s_1 \in S; \qquad s_1(r\acute{s} - \acute{r}s) = 0$$

در این صورت مجموعه ی رده های هم ارزی $R * S$ تحت رابطه ی هم ارزی فوق یک حلقه ی تعویض پذیر و یکدار که جمع و ضرب آن به صورت زیر تعریف می شود:

$\frac{r}{s} + \frac{\acute{r}}{\acute{s}} = \frac{r\acute{s}+\acute{r}s}{s\acute{s}}$

$(\frac{r}{s})(\frac{\acute{r}}{\acute{s}}) = \frac{r\acute{r}}{s\acute{s}})$

که این حلقه را با $S^{-1}R$نشان می دهند و حلقه ی خارج قسمتی کسرها نامیده می شود.که دارای عضو خنثی $\frac{0}{1}$ و وارون $\frac{s}{r}$ برای عنصر $\frac{r}{s}$ می باشد.

۱۷.۱

$Z_l(R)$: مجموعه ی تمام مقسوم علیه های راست صفر حلقه ی R
$r_R(I)$: پوچساز چپ زیر گروه غیر بدیهی S از حلقه ی R
$l_R(I)$: پوچساز راست زیر گروه غیر بدیهی Sاز حلقه ی R

۱.۲ تعریف:

حلقه ی R دارای ویژگی راست (چپ)(A) است، هر گاه برای هر ایده آل (دو طرفه) متناهیا تولید شده I که $I \subseteq Z_l(R)$ عنصر غیر صفری مانند $a \in R$ موجود باشد، به طوری که $Ia = ۰$.
حلقه R دارای ویژگی (A) است، اگر R دارای ویژگی راست وچپ (A) باشد.
باید توجه کنیم اگر حلقه ی اول R ، ایده آل غیر بدیهی $I \subseteq Z_l(R)$را داشته باشد. در آن صورت R ویژگی (A) را ندارد زیرا :

$$Ir_R(I) = ۰ \; (l_R(I)I) = ۰ \Longrightarrow r_R(I) = ۰$$

همواره به یاد داشته باشید که در حلقه اول R،ایده آل غیر بدیهی I را داریم که $۰ \neq I \subseteq Z_l(R)$.
به هر حال اگر حلقه ی دلخواهی داشته باشیم (به خصوص اگر اول باشد)ایده آل غیر بدیهی که زیر مجموعه ی $Z_l(R)$ یا($Z_r(R)$)باشد و حلقه ی R ویژگی(A)را داشته باشد،وجود ندارد.به عنوان مثال ،حلقه های ماتریسی $n * n$ روی میدانFکه حلقه ی اول ساده ایت، دارای ویژگی (A) می باشد

مثال زیر به خوبی نشان می دهد که ویژگی (A) همواره از چپ و راست برقرار نیست.

۲.۲ مثال:

حلقه ی صحیح $\mathbf{Z}_۲$ را در نظر بگیرید.وقرار دهید $L = \frac{\mathbf{Z}_۲(x)}{x^۲}$ کهδ تصویر x در L است.در این صورت Lبرابر است با $L = \mathbf{Z}_۲ \oplus \mathbf{Z}_۲\delta$ که $\delta^۲ = ۰$. اینک حلقه ی............ R را به صورت در نظر بگیرید. e_{ij}دارای ماتریس یکه ی واحد است و I ایده آل دو طرفه ی غیر بدیهی باشد. اگر $I(\delta e_{۲۲}) \neq ۰$ در این صورت I به صورت .... $<$ است.با ضرب کردن از سمت چپ $e_{۲۲}(۱ + \delta) \vee e_{۲۲}$ مشخص می شود که $I \ni e_{۲۲}$.................................
اما $e_{۱۲} = e_{۱۲}e_{۲۲} \in I$. چون I غیر بدیهی است،بنابراین I برابر است با ....
در نتیجه $e_{۱۲}$پوچساز راست I است.این نشان می دهد که R ویژگی (A) از سمت راست را دارد.
می توان نشان داد که R ویژگی (A) را از سمت چپ ندارد. ایده آلی از R را به صورت .... در نظر می گیریم که $I \subseteq Z_r(R)$. در این صورت ....
زیرا : $\frac{aL}{\mathbf{Z}_۲\delta} + bL = (\frac{a}{\mathbf{Z}_۲\delta})(\frac{\mathbf{Z}_۲(x)}{x^۲} + b(\frac{\mathbf{Z}_۲(x)}{x^۲})$ و سپس نشان می دهیم ....
بنابراین داریم ....
در این صورت R ویژگی (A) را از سمت چپ ندارد. (یعنی می توان عناصری ارایه داد که تعریف ویژگی (A) برقرار نیست.)

۳.۲ گزاره:

حاصلضرب مستقیم $S = \prod R_i$ که J مجموعه ی اندیس گزار است. ویژگی (A) را از سمت راست دارد اگر و فقط اگر به ازای هر i ، R_i ویژگی (A) را از سمت راست داشته باشد.

برهان: $\longrightarrow$
فرض کنید به ازای هر i ، R_i ویژگی (A) را از سمت راست دارد. قرار دهید

$I=\sum_{j=1}^{n} S<a_{Ji}>S \subseteq Z_l(s)$
که I ایده آل متناهیا تولید شده S است.که
$\forall j, <a_{ji}> \in S, \forall i \in J, a_{ji} \in R$.
در این صورت $I_{i.}=\sum_{j=1}^{n} R_{i.}a_{ji}R_{i.} \subseteq Z_l(R_{i.})$ به ازای بعضی از $i. \in J$.
اما باتوجه به فرض مساله وجود ندارد $\alpha_{i.} \in R_{i.}$ به طوری که $I_{i.}\alpha_{i.}=0$.
اینک دنباله ای تعریف کنید به صورت: $\alpha=\alpha_{i}0$، در بقیه جا $\alpha=0$. پس نتیجه می شود که α عضوی غیر بدیهی در S است به طوری که $I\alpha=0$. حال می توان گفت که S ویژگی (A) از سمت راست دارد.

برعکس: $\longleftarrow$ قرار دهید: $I_i=\sum_{t=1}^{n} R_i a_{ti} R_i \subseteq Z_l(R_i)$ که I_i ایده آل متناهیا تولید شده R_i به ازای بعضی از $i \in J$ و هم چنین $K=\prod_{j\in J} K_j$ ، $K_i=I_i$ ، $K_j=R_j$ زمانی که $j \neq i$.در این صورت K نیز ایده آل متناهیا تولید شده S است.(حاصل ضرب هر تعداد ایده آل باز هم ایده آل است.) و هم چنین اگر $I_i \subseteq Z_l(R)$ انگاه $K \subseteq Z_l(S)$ است. بنابراین چون S ویژگی (A) را از سمت راست دارد، دنباله ی غیر بدیهی $\delta=< d_j >\in S$وجود دارد که $K\delta=0$.
زمانی که $j \neq i$ ، $K_j=R_j$ ، $d_j=0$ در R_j، در این صورت δ دنباله ی غیر صفر است. یعنی $d_i \neq 0$ در R_i. در هر حال $I_i d_i=0$ و در نتیجه R_i ویژگی (A) را از سمت راست دارد. به طور کلی در حلقه های جابجایی یک حلقه ی تحویل یافته ویژگی (A) را ندارند.

۴.۲ مثال:

فرض کنید حلقه ی $R=$ .... را داریم.کهF میدان دلخواه است. در این صورت R حلقه ی نوتری (راست و چپ) است.اما R ویژگی (A) را از راست و چپ ندارد. می توان دو ایده آل به صورت زیر ارائه نمود که $I \subseteq Z_l(R)$و$J \subseteq Z_r(R)$ است.اما a و b مخالف صفر وجود ندارد که $Ia=0$ و $bJ=0$.
حال می توان نتیجه گیری کرد زمانی که حلقه تحویل یافته یا نوتری باشد،ویژگی (A) را دارد. یک ایده آل اول P از حلقه ی R به طور تام اول نامیده می شود اگر به ازای هر a و b داشته باشیم :

$ab \in P \Longrightarrow a \in Pb \in P$

توجه کنید که در حلقه های تحویل یافته تمام ایده آل های اول می نیمال به طور تام اول هستند. اینک ما قادر هستیم که لم زیر را اثبات کنیم:

۵.۲ : لم

فرض کنید Rحلقه تحویل یافته و I یک ایده آل R باشد.اگر $I \subseteq P_1 \bigcup ...... \bigcup P_n$ و به ازای هر P_i ایده آل اول می نیمال باشد، در این صورت وجود دارد i ای که $I \subseteq P_i$.

برهان: اثبات به استقراء روی n است. حال فرض کنیم $n=2$ و $I \subseteq P_1 \bigcup P_2$.
فرض خلف: $I \subseteq P_1 I \subseteq P_2$ پس وجود دارد $x \in I$ که $x \notin P_1$ و $y \in I$ و هم چنین $y \in P_2$.

$$x \in I \longrightarrow x \in P_1 \bigcup P_2 \qquad (3)$$

$$y \in I \longrightarrow y \in P_1 \bigcup P_2 \qquad (4)$$

چون I ایده آل است،پس

$$x - y \in I \qquad (۵)$$

$$(۳) \longrightarrow x \in P_۱ \vee x \in P_۲ \Longrightarrow x \in P_۲$$

و هم چنین

$$(۴) \longrightarrow y \in P_۱ \vee y \in P_۲ \Longrightarrow y \in P_۱$$

در حالت $= n$ از شرط اول بودن P استفاده نشد.

$$(۵) \longrightarrow x - y \in P_۱ \vee x - y \in P_۲$$

که از اولی به دست می آید که $x \in P_۲$ و از دومی به دست می آید که $x \in P_۱$ که از هر دو تناقض به دست می آید.

فرض استقراء : حکم برای n برقرار است. اگر I زیر مجموعه اجتماع n ایده آل اول باشد، آن گاه I زیر مجموعه ی حداقل یکی از ایده آل های اول است.

حکم استقراء : اگر

$$I \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n+۱} P_i$$

آن گاه

$$\exists \qquad ۱ \leq i \leq n \qquad I_i \subseteq P$$

با توجه به فرض استقراء کافی است ثابت کنیم :

$$\exists j \qquad ۱ \leq j \leq n + ۱ \qquad I \subseteq \bigcup_{\substack{i=۱ \\ i \neq j}}^{n+۱} P_i$$

فرض کنیم چنین نباشد:

$$\forall j \qquad ۱ \leq j \leq n + ۱ \qquad I \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=۱ \\ i \neq j}}^{n+۱}$$

پس :

$$\forall j \qquad ۱ \leq j \leq n + ۱ \qquad \exists x_j \in I; x_j \notin \bigcup_{\substack{i=۱ \\ j \neq ۱}}^{n+۱} P_i \qquad (۶)$$

حال با توجه به رابطه ی بالا می توان نوشت:

$$x_۱ \in I \longrightarrow x_۱ \in P_۱, \forall j \neq ۱ \qquad x_۱ \notin P_j$$

$$x_۲ \in I \longrightarrow x_۲ \in P_۲, \forall j \neq ۲ \qquad x_۲ \notin P_j$$

$$x_{n+۱} \in I \longrightarrow x_{n+۱} \in P_{n+۱}, \forall j \neq n+۱ \qquad x_{n+۱} \notin P_j$$

پس طبق تعریف ایده آل I $x_۱......x_n - x_{n+۱} \in I$

و در نتیجه $x_۱........x_n - x_{n+۱} \in \bigcup_{i=۱}^{n+۱} P_i$ در این صورت می توان نوشت:

$$\exists i; ۱ \leq i \leq n \qquad x_۱.....x_n - x_{n+۱} \in P_i \Longrightarrow ۱ \leq i \leq n; x_{n+۱}\ inP_i$$

که تناقض است.پس $x_۱....x_n - x_{n+۱} \in P_{n+۱}$.

چون $x_{n+۱} \in P_{n+۱}$ پس $x_۱.....x_n \in P_{n+۱}$ و در این صورت $P_{n+۱}$ ایده آل اول است. پس

$$\exists i; ۱ \leq i \leq n \qquad x_i \in P_{n+۱}.$$

۶.۲ قضیه :

اگر R حلقه ی کاهشی با تعداد متناهی ایده آل اول می نیمال باشد، در آن صورت R دارای ویژگی (A) است.

برهان :

a یک مقسوم علیه صفر حلقه ی R باشد. بنابراین یک ایده آل اول می نیمال شاملa موجود است.برای اینکه نشان دهیم $a \notin P$ برای تمام ایده آل های اول می نیمال P در R . قرار دهید

$$r_R(a) \subseteq P \Longrightarrow r_R(a) \subseteq P(R)$$

زمانی که R حلقه ی کاهشی باشد، در این صورت $P(R) = ۰$ و در نتیجه $r_R(a) = ۰$. که تناقض است.قرار دهید

$$I = \sum_{i=۱}^{n} Ra_iR \subseteq Z_l(R)$$

با این فرض و مفروضات قبلی ،I شامل یکه ....ایده آل اول می نیمال R است. با توجه به لم ۱/۵ بنابراین یک ایده آل می نیمال P از R موجود است که $I \subseteq P$ برای هر $a_i \in I \subseteq P$ وجود دارد $x_i \in R/P$ به طوری که $a_ix_i =$ ۰ .... توجه کنید که $x_۱$........................$x_n \neq ۰$ زیرا P به طور کامل اول ....است و R حلقه ی کاهشی است. و $x_۱x_۲......a_ix_i......x_n = ۰$ و$a_ix_۱.......x_n = ۰$.................................

بنابراین $Ra_iRx_1....x_n = 0$ به ازای هر i در نتیجه $Ix_1.....x_n = 0$. بنابراین R ویژگی راست (A) را دارد. به همین روش R ویژگی چپ را نیز دارد.

۷.۲ گزاره :

فرض کنید R حلقه ی کاهشی با خاصیت $a.c.c$ بر روی پوچساز راست باشد. در این صورت R ویژگی (A) رادارد.

برهان : ....R دارای فقط تعداد متناهی ایده آل اول می نیمال باشد این حکم را نتیجه می دهد. باید توجه کنیم که در حلقه نیمه اول مضرب مشخصی سازی ....ایده آل اول می نیمال وجود دارد. در حلقه جابجایی R ،هر ایده آل اول R که ماکزیمال باشد، در آن صورت R ویژگی R را دارد......................اما این مطلب در حلقه نیمه جابجایی همواره برقرار نیست.به عنوان مثال ۱.۴ هر ایده آل اول در حلقه R ماکزیمال است،اما ویژگی (A) را ندارد.

۸.۲ گزاره :

فرض کنید R یک حلقه ی برگشت پذیر باشد. اگر هر ایده آل اول R ماکزیمال باشد، در آن صورت R ویژگی (A) را دارد.

برهان : فرض کنید $I = \sum_{i=1}^{n} Ra_iR \subseteq Z_l(R)$. در این صورت به ازای تعدادی از ایده آل های ماکزیمال P از $I \subseteq PR$ است. توجه کنید که P ایده آل اول می نیمال است. اگر $I \subseteq P(R)$ باشد می توان نتیجه گرفت که I پوچ توان است. به ازای بعضی از k_i صحیح مثبت که $i = 1,....,n$ قراردهید: $a_i^{k_i} = 0$. زمانی که R برگشت پذیر باشد، در این صورت $(Ra_iR)^{k_i} = 0$ هم چنین $I^K = 0$ v است زمانی که $K = \sum_{i=1}^{n} k_i$. فرض کنید s کوچکترین عدد مثبتی باشد که $I^s = 0$. و $I \nsubseteq P(R)$ و $0 \neq I^{s-r} \subseteq r_R(I) = l_R(I)$ .... باشد. در این صورت $\bar{R} = R/P(R)$. توجه کنید که کاهشی است، زمانی که$P(R)$ عضو مجموعه ی تمام اعضای پوچ توان در حلقه ی برگشت پذیر R باشد. حال در نظر بگیرید: ....

$$\bar{I} = (I + P(R))/P(R)\bar{P} = P/P(R) \qquad (۷)$$

هر جا که a_i لازم است،

$$\forall i > t \qquad a_i \in P(R) \qquad\qquad a_1....a_t \nsubseteq P(R)$$

که $1 \leq t \leq$. پس به ازای هر .... زمانی
که$1 \leq j \leq t$ وجود دارد که ....به طوری که
.... زیرا .... حلقه ی کاهشی و .... ایده آل می
نیمال اول است.توجه کنید .... زیرا ....
به طور تام اول است. زمانی که .... حلقه ی کاهشی باشد
....
....
و هم چنین $1 \leq j \leq t \qquad \forall j$ ....
قرار دهید :.. و سپس $Ib \subseteq$
$P(R)$ و هم چنین $Ib^m = 0$ که m کوچکترین عددی است که $m \geq 1$. اگر

$$m = 1 \longrightarrow Ib = 0$$

و حکم به دست می آید. فرض کنید $m \geq 2$ اگر $bIb^{m-1} \neq 0$. بنابراین $Ra_iRx -$
$0 = x_n.....1$ به ازای هر i بنابراین $Ix_1.......x_n = 0$ در نتیجه R ویژگی راست (A)
را دارد. به همین روش R ویژگی چپ (A) را نیز دارد.

۹.۲ گزاره:

فرض کنید R حلقه ی کاهشی با خاصیت $a.c.c$ بر روی پوچساز راست باشد. در این صورت R ویژگی (A) را دارد. برهان: