دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

سمینار کارشناسی ارشد با عنوان

بعضی تاملات بر
درجه های جابجایی n ام گروه های متناهی

استاد راهنما

دکتر رضایی

پژوهشگر

زهرا احمدوند شاهوردی

بهار ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی و n یک عدد صحیح مثبت باشد.درجه جابجایی n ام $P_n(G)$ از G محتملا، n امین توان ازعضوتصادفی G که باعضو تصادفی دیگری از G جابجامی شود.در۱۹۶۸،پائول اردوش وتوران حالت $n = 1$ که تنها شامل روش های ترکیبی بود را بررسی کردند.اخیراچندین نویسنده مطالعاتشان راافزایش دادندویک رشدنوشتاری در۱۰سال اخیروجوددارد.مارابطه درجه جابجایی n ام $P_n(H, G)$ ازیک زیرگروه H در G رامعرفی می کنیم.محتملایک توان n ام ازیک عضوتصادفی داخل H هست که بایک عضودر G جابجامی شود.تاثیر $P_n(G)$ و $P_n(H, G)$ روی ساختار G ،هدف کارحاضراست.

۱ مقدمه

همه ی گروه هایی که درنظرمی گیریم متناهی هستند.برای هرگروه G ، درجه جابجایی n ام $P_n(G)$ از G توان n ام عضوتصادفی G است که باعضوتصادفی دیگری از G جابجامی شود.صریحا

$$P_n(G)=\frac{|\{(x,y)\in G\times G:[x^n,y]=1\}|}{|G|^2}$$

(۱)اخیراتوسط علی ن.م.م [۱] و ن.سارمین [۲] در [؟] معرفی شده است.آنها(۱)رابرای تعدادی مقدار n وتعدادی ۲-گروه۲-مولدازکلاس پوچتوانی۲محاسبه کردند.اهمیت $P_n(G)$ ناشی ازحقیقت اینست که $d(G)=P_1(G)$ که درجه جابجایی G است،توسط اردوش وتوران در [؟] معرفی می شود.این چنین یک کار یک منبع کلاسیک برای مطالعات چندین نویسنده میشود، همانطورکه برای مثال توسط [؟، ؟، ؟، ؟] گواهی داده شد.تعمیم های $d(G)$ زیادی وجوددارد.درجه پوچتوانی n ام $d^n(G)$ از G در [؟] و [؟] مطالعه شد.درجه n تایی جابجایی متقابل $d_n(G)$ از G در [؟] مطالعه شد.درمیان این دونوشتار،خواهیم دیدکه $P_n(G)$ می تواندقرارگرفته شودواین علاقه مارابه سروکارداشتن با آن تصدیق می کند.نتایج مهم ازبرگه حاضر درزیرمی آیند.

[۱] N.M.M.Ali
[۲] N.Sarmin

قضیهA.

فرض کنید G گروه ناآبلی و p کوچکترین عدداولی که مرتبه G راعادمی کند.دراینصورت گزاره های زیرهم ارزند:

(i) $\frac{G}{Z(G)} \simeq Z_P \times Z_P$;

(ii) Gبایک ابرpگروه ازمرتبه $p^۳$ایزوکلینیک است

(iii) $P_n(G) = \frac{p^۲+p-۱}{p^۳}$ به ازای هرn هرگاه توسط pعادنشود

قضیهB.

اگر G و H دوگروه ایزوکلینیک باشند،آنگاه برای هر $n \geq ۱$، $P_n(G) = P_n(H)$.

۲ چندنتیجه اساسی

دوتعریف زیرقبلادربالاذکرشده اند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید G گروه باشد.برای هر $n \geq ۱$

$d^n(G) = \frac{|\{(x_۱,\ldots,x_{n+۱})\in G^{n+۱}:[x_۱,\ldots x_{n+۱}]=۱\}|}{|G|^{n+۱}}$ درجه پوچتوانی n ام G نامیده می شود و $d_n(G) = \frac{|\{(x_۱,\ldots,x_{n+۱})\in G^{n+۱}:x_ix_j=x_jx_i\}|}{|G|^{n+۱}}$ درجه n -تایی جابجایی متقابل G نامیده می شود.

به طوربدیهی برای $n = ۱$ در(۲)و(۳)درجه جابجایی $d(G)$ رادر [؟، ؟] پیدامی کنیم.نتایج مهمی روی $d^n(G)$ و $d_n(G)$ در [؟، ؟، ؟] وجوددارد.دراین کارهامفهوم اصلی درجه پوچتوانی نسبی $d^n(H,G)$ ازیک زیرگروه H در G مطالعه می شود.بااستفاده ازایده داده شده در [؟] ،مفهوم زیررامعرفی می کنیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنید H یک زیرگروه از گروه G باشد. $P_n(H,G)=\frac{|\{(h,g)\in H\times G:[h^n,g]=1\}|}{|H||G|}$ درجه جابجایی n -ام نسبی G نامیده می شود.

به روشنی،اگر $H=G$ آنگاه $P_n(H,G)=P_n(G)$. ما $P_n(H,G)$ و $P_n(G)$ راگاهی اوقات برابر بایکدیگردرنظر می گیریم.

مثال ۳.۲. برای مثال ،اگر G آبلی یاتوانی داشته باشدکه n راعادکند،آنگاه $P_n(G)=P_n(H,G)=1$.

لم ۴.۲. *اگر G یک گروه پوچتوان ازکلاس۲که زیرگروه مشتق آن توانی داشته باشدکه n راعادکند،آنگاه $P_n(G)=P_n(H,G)=1$.*

برهان.

$$[x^n,y]=[xx^{n-1},y]=[x,y]^{x^{n-1}}[x^{n-1},y]=(x^{n-1})^{-1}[x,y]x^{(n-1)}[x^{n-1},y]$$

$$=[x,y][x,y]^{-1}(x^{n-1}))^{-1}[x,y]x^{n-1}[x^{n-1},y]=[x,y][x,y,x^{(n-1)}][x^{(n-1)},y]$$

چون $[x,y,x^{(n-1)}]=1$ آنگاه داریم: $[x,y][x^{n-1},y]=\ldots=[x,y]^n=1$ $\square$

البته برای گروه G وزیرگروه H از G وعددصحیح مثبت n داریم $P_n(H,G)=1$ و $P_n(G)<1$ (برای مثال،میگیریم $H\subseteq Z(G)$).

تعدادی لم برای اثبات قضایای اصلی ضروری هستند.بایک حقیقت ابتدایی شروع می کنیم که $P_n(H,G)$ و $P_n(H)$ راباهم مقایسه می کند.

لم ۵.۲. *فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد.آنگاه:*

$$\forall n\geq 1, P_n(H,G)\leq P_n(H)$$

برابری برقرار است اگر $G=HZ(G)$

برهان.

$$p_n(H,G)=\frac{۱}{|H||G|}\sum_{h\in H}|C_G(h^n)|=\frac{۱}{|H|}\sum_{h\in H}\frac{|C_G(h^n)|}{|G|}$$
$$\leq\frac{۱}{|H|}\sum_{h\in H}\frac{|C_H(h^n)|}{|H|}=\frac{۱}{|H|^۲}\sum_{h\in H}|C_H(h^n)|=P_n(H)$$

چون

$$\forall x\in G, HC_G(x)\subseteq G\to |HC_G(x)|\leq |G|$$

$$\to\frac{|H||C_G(x)|}{|H\bigcap C_G(x)|}\leq |G|\to\frac{|H|}{|C_H(x)|}\leq\frac{|G|}{|C_G(x)|}\to [H:C_H(x)]\leq [G:C_G(x)]$$

حال اگر $G=HZ(G)$ آنگاه به ازای هر $x\in G$ داریم $G=HC_G(x)$ پس:

$[H:C_H(x)]=[G:C_G(x)]$. بنابراین برای هر $n\geq ۱$ داریم $P_n(H,G)=P_n(H)$.

□

لم ۶.۲. *فرض کنید H زیرگروه سره گروه G باشد. دراین صورت*

$$\forall n\geq ۱,\ \frac{۱}{[G:H]}P_n(H,G)\leq P_n(G)$$

برهان.

$$P_n(G)=\frac{۱}{|G|^۲}\sum|C_G(g^n)|=\frac{۱}{|G|^۲}[\sum_{g\in H}|C_G(g^n)|+\sum_{g\in G-H}|C_G(g^n)|]$$
$$=\frac{۱}{|G|^۲}[|H||G|P_n(H,G)+\sum_{g\in G-H}|C_G(g^n)|]>\frac{|H|}{|G|}P_n(H,G)$$
$$\to P_n(G)>\frac{۱}{[G:H]}P_n(H,G)$$

□

لم ۷.۲. *فرض کنید H و K زیرگروه های گروه G باشند، به طوری که K مشمول در H است .در این صورت*

$$\forall n\geq ۱, P_n(H,G)\geq\frac{۱}{[H:K]}P_n(K,G)\geq\frac{۱}{[G:K]}P_n(K,H)$$