فصل ۳

معادلات حاکم و روش عددی

۱.۳ معادلات حاکم

پدیده‌های کلاسیک الکترومغناطیس به وسیله معادلات ماکسول [۱] قابل تشریح می‌باشند که عبارتند از:

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{۱.۳}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{۲.۳}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = q \tag{۳.۳}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{۴.۳}$$

[۱] Maxwell's Equations

معادلات (۱.۳) و (۲.۳) به ترتیب قانون القای فارادی[۲] و قانون آمپر[۳] اصلاح شده می‌باشند و معادلات (۳.۳) و (۴.۳) قانون گوس[۴] را به ترتیب در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بیان می‌کنند. جایی که $\overrightarrow{B}(Tesla)$ و $\overrightarrow{E}(V/m^۳)$ به ترتیب میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی و $\overrightarrow{H}$ و $\overrightarrow{D}$ به ترتیب میدان القایی برای میدان‌های الکتریکی و الکترومغناطیسی می‌باشند. همچنین $q(C/m^۳)$ چگالی بار الکتریکی و $\overrightarrow{j}(A/m^۲)$ بردار چگالی جریان الکتریکی می‌باشند.

میدان‌های القایی $\overrightarrow{H}$ و $\overrightarrow{D}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overrightarrow{H} = \frac{۱}{\mu}\overrightarrow{B} \tag{۵.۳}$$

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E} \tag{۶.۳}$$

که در این معادلات μ و ε به ترتیب نفوذپذیری مغناطیسی و نفوذپذیری الکتریکی می‌باشند.

معادلات پیوستگی و مومنتوم برای یک جریان تراکم‌ناپذیر و رسانا به صورت زیر می‌باشد.

$$\nabla \cdot u = ۰ \tag{۷.۳}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^۲ u + \frac{F}{\rho} \tag{۸.۳}$$

که در آن u بردار سرعت، ρ چگالی سیال و ν لزجت سینماتیکی جریان می‌باشد. همچنین F نیرویی است که در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی به ذرات یک سیال باردار که با سرعت u در حال حرکت می‌باشد، وارد می‌شود و نیروی لورنتز[۵] نامیده می‌شود.

برای مطالعه تقابل میدان جریان و میدان الکترومغناطیسی لازم است که چگالی جریان را به دست آوریم. برای این منظور، به‌طور کلی دو روش وجود دارد، حل معادله القایی مغناطیسی و حل معادله پتانسیل الکتریکی.

[۲] Faraday Law
[۳] Ampere Law
[۴] Gauss Law
[۵] Lorentz Force

در حالت کلی این نیرو به صورت ضرب بردار چگالی جریان الکتریکی $\overrightarrow{j}$ و بردار میدان مغناطیسی $\overrightarrow{B}$ نشان داده می‌شود:

$$F = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{B} \tag{۹.۳}$$

که در آن چگالی جریان از قانون اُهم[۶] به دست می‌آید.

$$J = \sigma(\overrightarrow{E} + V \times \overrightarrow{B}) \tag{۱۰.۳}$$

با توجه به معادلات ۸.۳ و ۱۰.۳ توزیع میدان الکترومغناطیس و توزیع کمیت‌های جریان در میدان جریان از همدیگر تاثیر می‌پذیرند. بنابراین جهت بررسی تاثیر متقابل آن‌ها، می‌بایست معادلات ماکسول و معادلات ناویر-استوکس به‌طور همزمان حل گردند. اگر سیال یک فلز مایع یا فلز مذاب با ضریب رسانایی بالا باشد، یک کنترل کامل و بدون تماس فلز مایع با استفاده از میدان‌های مغناطیسی ممکن می‌باشد. برخلاف فلزات مایع، الکترولیت‌ها مثل آب دریا، رسانایی پایینی در حدود ۱۰S/m دارند.

در مباحث دینامیک سیالات مغناطیسی، تقریب‌های زیر برای مطالعه اثرات متقابل جریان سیال و میدان الکترومغناطیس در نظر گرفته می‌شوند[؟].

$$\rho_{el} = 0 \tag{۱۱.۳}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0 \tag{۱۲.۳}$$

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = 0 \tag{۱۳.۳}$$

از آنجا که سیال مورد نظر ما، ضریب هدایت الکتریکی پایینی دارد و با توجه به اینکه حداکثر شدت میدان مغناطیسی قابل کاربرد در عمل کم‌تر از ۱ تسلا می‌باشد، از اینرو در سمت راست معادله ۱۰.۳، ترم دوم نسبت به ترم اول ناچیز بوده و قابل صرف

[۶] Ohm's Law

نظر می‌باشد. با اعمال این فرض توزیع میدان الکترومغناطیسی در میدان جریان مستقل از کمیت‌های جریان می‌باشد.

$$J = \sigma E \tag{۱۴.۳}$$

برای اینکه چگالی جریان برای اهداف کنترل جریانی به اندازه کافی بزرگ باشد، لازم است که میدان الکتریکی به اندازه $E_\circ$ را طوری اعمال کنیم که[؟]:

$$\frac{E_\circ}{U_\infty B_\circ} \gg ۱ \tag{۱۵.۳}$$

همچنین در تحقیق حاضر فرض شده است میدان مغناطیسی از به کارگیری آهنربای دائمی ایجاد شده باشد، که در این صورت تغییرات زمانی آن صفر خواهد بود و از معادله ۱.۳ خواهیم داشت:

$$\nabla \times E = \circ \tag{۱۶.۳}$$

از معادله ۳.۳ و با توجه به ۱۱.۳ داریم:

$$\nabla \cdot E = \circ \tag{۱۷.۳}$$

با توجه به معادلات ۱۶.۳ و ۱۷.۳ می‌توان نتیجه گرفت که میدان الکتریکی به صورت گرادیان یک تابع پتانسیل قابل بیان است:

$$E = -\nabla \phi \tag{۱۸.۳}$$

همچنین با ادغام روابط ۱۷.۳ و ۱۸.۳ رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\nabla^۲ \phi = \circ \tag{۱۹.۳}$$

با اعمال اپراتور کرل در طرفین معادله ۲.۳ پس از بسط دادن طرفین داریم:

$$\nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^{۲} H = -\sigma \nabla \times \nabla \phi \tag{۲۰.۳}$$

با توجه به اینکه کرل گرادیان یک کمیت اسکالر صفر است و با توجه به روابط ۴.۳ و ۵.۳ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^{۲} B = ۰ \tag{۲۱.۳}$$

بنابراین معادلات حاکم بر یک جریان تراکم‌ناپذیر یک سیال رسانا با ضریب هدایت الکتریکی پایین و در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی به معادلات (۱۹.۳،۸.۳ و ۲۱.۳) به علاوه معادله پیوستگی تقلیل می‌یابد.

اگر یک میدان جریان با عمق h بر روی این عملگر در نظر گرفته شود، آن وقت شرایط مرزی الکترومغناطیسی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$(J_y)_{wall} = -\sigma(\frac{\partial \phi}{\partial y}) = J_{\circ} \sin(\frac{\pi}{۲a}x) \tag{۲۲.۳}$$

$$(B_y)_{wall} = B_{\circ} \cos(\frac{\pi}{۲a}x) \tag{۲۳.۳}$$

$$(J_y)_h = (B_y)_h = ۰ \tag{۲۴.۳}$$

با اعمال شرایط مرزی فوق، توزیع میدان‌های الکترومغناطیسی از حل تحلیلی معادلات (۱۹.۳ و ۲۱.۳) به دست آمده و با اعمال فرض $h/a \gg ۱$ نهایتاً نیروی لورنتز به رابطه زیر تقلیل می‌یابد[؟]:

$$F = J \times B = J_{\circ} B_{\circ} exp(\frac{-\pi}{a}y) \tag{۲۵.۳}$$

مطابق رابطه فوق، نیروی لورنتز به صورت نمایی با افزایش فاصله از دیوار کاهش می‌یابد.

یکی از مزیت‌های این روش این است که در عمل، تقریباً هر نوع توزیعی از نیروهای لورنتز را می‌توان با آرایش مناسب