فصل ۱

مفاهیم اصلی

در بخش اول این فصل مجموعه‌ای از اصطلاحات و نمادهایی که در فصول بعدی به کار می‌روند را بیان کردیم. در بخش دوم و سوم توضیح مختصری درباره توابع و عملگرها و همچنین سیستم‌های جبری آورده شده است.

است. همچنین

Δ_A (به عبارت دیگر یک قطر از مجموعه A) عملگر دوتایی همانی روی A است یعنی

$$\Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$$

است. یک رابطه همگن $\rho \subset A \times A$ را:

- انعکاسی می‌نامند اگر $\Delta_A \subset \rho$ باشد.
- انعکاسی جزئی می‌نامند اگر $\Delta_{pr_۱\rho \cup pr_۲\rho} \subset \rho$ باشد.
- متقارن می‌نامند اگر $\rho = \rho^{-۱}$ باشد.
- انتقالی می‌نامند اگر $\rho \circ \rho \subset \rho$ باشد.

• پادمتقارن می‌نامند اگر $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$ باشد.

یک رابطه دوتایی انتقالی و انعکاسی را یک رابطه شبه-ترتیب می‌نامند و یک رابطه شبه-ترتیب پادمتقارن را ترتیب می‌نامند. یک رابطه دوتایی متقارن و انعکاسی را شبه-هم ارز می‌نامند و یک رابطه متقارن و انتقالی را هم ارز جزئی (جزئا هم ارز) می‌نامند. یک رابطه دوتایی انعکاسی و متقارن و انتقالی را رابطه هم ارزی یا هم ارزی می‌نامند. هر ρ شبه-ترتیب روی A یک هم ارزی $\varepsilon = \rho \cap \rho^{-1}$ روی A القا می‌کند.

در حقیقت چون ρ انعکاسی هست پس $\Delta_A \subset \rho$ است. پس $\Delta_A \subset \rho^{-1}$ است. در نتیجه $\Delta_A \subset \rho \cap \rho^{-1} = \varepsilon$ است. پس ε انعکاسی است. برای بررسی تقارن تساوی $\varepsilon = \varepsilon^{-1}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \varepsilon &\Leftrightarrow (a,b) \in \rho \cap \rho^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in \rho, (a,b) \in \rho^{-1} \\
&\Leftrightarrow (b,a) \in \rho^{-1}, (b,a) \in \rho \Leftrightarrow (b,a) \in \rho \cap \rho^{-1} = \varepsilon \\
&\Leftrightarrow (a,b) \in \varepsilon^{-1}
\end{aligned}$$

برای بررسی انتقالی بودن ε باید نشان دهیم $\varepsilon \circ \varepsilon \subset \varepsilon$ است.

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) \in \varepsilon \circ \varepsilon &\Rightarrow (\exists\ a_3) : (a_1, a_3) \in \varepsilon, (a_3, a_2) \in \varepsilon \\
&\Rightarrow (a_1, a_3) \in \rho \cap \rho^{-1}, (a_3, a_2) \in \rho \cap \rho^{-1} \\
&\Rightarrow (a_1, a_2) \in \rho, (a_1, a_2) \in \rho^{-1} \Rightarrow (a_1, a_2) \in \varepsilon
\end{aligned}$$

آخرین نتیجه از انتقالی بودن ρ و ρ^{-1} بدست آمده است. با توجه به آنچه اثبات شد واضح است که اگر ρ فقط یک رابطه دوتایی باشد آن‌گاه ε لزوما متقارن است.

فرض کنید $\varepsilon \subset A \times A$ یک رابطه هم ارزی باشد آن‌گاه به جای $(a,b) \in \varepsilon$ عبارت $a \equiv b(\varepsilon)$ نوشته می‌شود. برای هر $a \in A$ زیر مجموعه $\varepsilon\langle a \rangle$ را ε-کلاس($an\ abstract\ class\ or\ a\ block$)

(یک کلاس مجرد یا یک بلوک) شامل a می‌نامند. مجموعه همه ε-کلاس‌ها را با A/ε نشان می‌دهند و مجموعه خارج قسمتی یا مجموعه فاکتورگیری از A با توجه به ε می‌نامند. می‌توان نشان داد ε-کلاس‌ها، یک افراز از A تشکیل می‌دهند یعنی

۱) $\bigcup_{a\in A}\varepsilon\langle a\rangle = A$ است.

۲) برای هر $a,b\in A$ که $a\neq b$، $\varepsilon\langle a\rangle\cap\varepsilon\langle b\rangle=\emptyset$ است.

واضح است که $a\equiv b(\varepsilon)$ اگر و فقط اگر $\varepsilon\langle a\rangle=\varepsilon\langle b\rangle$ باشد.

یک رابطه n-تایی (یا یک n-رابطه) بین عناصر مجموعه‌های $A_1,...,A_n$، زیرمجموعه ρ از حاصل‌ضرب دکارتی $A_1\times A_2\times...\times A_n$ است. اگر $A_1=A_2=...=A_n$ آن‌گاه n-رابطه ρ را همگن می‌نامند.

رابطه‌های $(n+1)$-تایی به صورت $\rho\subset A_1\times...\times A_n\times B$ است. چنین رابطه‌هایی به‌صورت رابطه‌های دوتایی به شکل $\rho\subset(A_1\times...\times A_n)\times B$ یا $\rho\subset(\times_{i=1}^n A_i)\times B$ در نظر گرفته خواهد شد. در صورت همگن بودن، رابطه‌های $(n+1)$-تایی به صورت $\rho\subset A^n\times A$ یا $\rho\subset A^{n+1}$ نوشته می‌شوند.

فرض کنید $\rho\subset(\times_{i=1}^n A_i)\times B$ یک رابطه $(n+1)$-تایی و $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ یک عنصر از $A_1\times A_2\times...\times A_n$ است. همچنین برای $i\in\{1,...,n\}=\overline{1,n}$ فرض کنید $H_i\subset A_i$ است. نمادهای $\rho\langle\overline{a}\rangle$ و $\rho(H_1,...,H_n)$ را به صورت تعریف می‌کنیم.

$$\rho\langle\overline{a}\rangle=\{b\in B|(\overline{a},b)\in\rho\}, \tag{1.0.1}$$

$$\rho(H_1,...,H_n)=\bigcup\{\rho\langle\overline{a}\rangle|\overline{a}\in H_1\times H_2\times...\times H_n\}. \tag{1.0.2}$$

به علاوه $pr_1(\rho)$ و $pr_2(\rho)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$pr_1(\rho)=\{\overline{a}\in\times_{i=1}^n A_i|(\exists b\in B)(\overline{a},b)\in\rho\},$$

$$pr_{2}(\rho) = \{b \in B | (\exists \overline{a} \in \times_{i=1}^{n} A_i)(\overline{a}, b) \in \rho\}.$$

برای هر دنباله از رابطه‌های $(n+1)$-تایی $\sigma_1, ..., \sigma_n$ و ρ که برای $i \in \overline{1, n}$

$$\sigma_i \subset A_1 \times ... \times A_n \times B_i \quad , \quad \rho \subset B_1 \times ... \times B_n \times C$$

است، رابطه $(n+1)$

$$\rho[\sigma_1 ... \sigma_n] \subset A_1 \times ... \times A_n \times C$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\rho[\sigma_1 ... \sigma_n] = \{(\overline{a}, c) | (\exists \overline{b})(\overline{a}, b_1) \in \sigma_1, ..., (\overline{a}, b_n) \in \sigma_n, (\overline{b}, c) \in \rho\} \qquad (۱.۰.۳)$$

که $\overline{b} = (b_1, ..., b_n) \in B_1 \times ... \times B_n$ است.

واضح است که

$$\rho[\sigma_1 ... \sigma_n](H_1, ..., H_n) \subset \rho(\sigma_1(H_1, ..., H_n), ..., \sigma_n(H_1, ..., H_n)), \qquad (۱.۰.۴)$$

$$\rho[\sigma_1 ... \sigma_n][\chi_1 ... \chi_n] \subset \rho[\sigma_1[\chi_1 ... \chi_n] ... \sigma_n[\chi_1 ... \chi_n]] \qquad (۱.۰.۵)$$

است که برا ی $i = 1, ..., n$ ، $\chi_i \subset A_1 \times ... \times A_n \times B_i$ و $\sigma_i \subset B_1 \times ... \times B_n \times C_i$ و $\rho \subset C_1 \times ... \times C_n \times D$ است.

بررسی رابطه (۱.۰.۴)

ابتدا باید شکل کلی اعضای $\rho[\sigma_1 ... \sigma_n](H_1, ..., H_n)$ مشخص شود. با استفاده از تعریف $\rho[\sigma_1 ... \sigma_n] \subset A_1 \times ... \times A_n \times C$ است. حال با توجه به (۱.۰.۱) و (۱.۰.۲)

$$\rho[\sigma_1 ... \sigma_n](H_1, ..., H_n) = \bigcup \{\rho[\sigma_1 ... \sigma_n]\langle \overline{a} \rangle | \overline{a} \in H_1 \times ... \times H_n\}$$

$$= \bigcup \{c \in C | (\overline{a}, c) \in \rho[\sigma_1 ... \sigma_n], \overline{a} \in H_1 \times ... \times H_n\}$$

حال با توجه به شکل کلی اعضا اثبات رابطه (۱.۰.۴) به صورت زیر است.

$$c \in \rho[\sigma_1 ... \sigma_n](H_1, ..., H_n)$$

$$\Rightarrow (\overline{a}, c) \in \rho[\sigma_1 ... \sigma_n], \overline{a} \in H_1 \times ... \times H_n$$

$$\overset{(1.0.3)}{\Rightarrow} \exists \overline{b} \in B | (\overline{a}, b_1) \in \sigma_1, ..., (\overline{a}, b_n) \in \sigma_n, (\overline{b}, c) \in \rho$$

$$\Rightarrow \exists \overline{b} \in B | b_1 \in \sigma_1 \langle \overline{a} \rangle, ..., b_n \in \sigma_n \langle \overline{a} \rangle, (\overline{b}, c) \in \rho$$

$$\Rightarrow \exists (b_1, ..., b_n) = \overline{b} \in \sigma_1 \langle \overline{a} \rangle \times ... \times \sigma_n \langle \overline{a} \rangle, (\overline{b}, c) \in \rho$$

$$\Rightarrow c \in \rho(\sigma_1(H_1, ..., H_n), ..., \sigma_n(H_1, ..., H_n))$$

برای فهم بهتر آخرین نتیجه کافی است که هریک از $\sigma_i(H_1, ..., H_n)$، $i = 1, ..., n$ به صورت یک k_i در نظر گرفته شود و سپس از تعریف $\rho(k_1, ..., k_n)$ استفاده شود.

بررسی رابطه (۱.۰.۵)

روابط زیر را در نظر بگیرید.

$$K := \rho[\sigma_1 ... \sigma_n] \subset B_1 \times ... \times B_n \times D$$

$$\rho[\sigma_1 ... \sigma_n][\chi_1 ... \chi_n] = K[\chi_1 ... \chi_n] \subset A_1 \times ... \times A_n \times D$$

$$\sigma_i[\chi_1 ... \chi_n] \subset A_1 \times ... \times A_n \times C_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

حال به سراغ اثبات می‌رویم.

$$(\overline{a}, d) \in K[\chi_1 ... \chi_n] \to (\exists \overline{b}) |\ (\overline{a}, b_1) \in \chi_1, ..., (\overline{a}, b_n) \in \chi_n, (\overline{b}, d) \in K$$

$$\to (\exists \overline{b}) | (\overline{a}, b_1) \in \chi_1, ..., (\overline{a}, b_n) \in \chi_n, \exists \overline{c} | (\overline{b}, c_1) \in \sigma_1, ..., (\overline{b}, c_n) \in \sigma_n, (\overline{c}, d) \in \rho.$$

حال با توجه به اینکه برای هر $i = 1, 2, ..., n$، $(\overline{b}, c_i) \in \sigma_i, (\overline{a}, b_i) \in \chi_i$ است پس

$(\overline{a}, c_1) \in \sigma_1(\chi_1, ..., \chi_n), ..., (\overline{a}, c_n) \in \sigma_n(\chi_1, ..., \chi_n)$

است. در نتیجه عنصر $\overline{c}$ وجود دارد به طوری که برای هر $i = 1, ..., n$

$$(\overline{a}, c_i) \in \sigma_i(\chi_1, ..., \chi_n), (\overline{c}, d) \in \rho \to (\overline{a}, d) \in \rho[\sigma_1[\chi_1...\chi_n]...\sigma_n[\chi_1...\chi_n]].$$

است.

$(n+1)$-عملگر $O : (\rho, \sigma_1, ..., \sigma_n) \longmapsto \rho[\sigma_1...\sigma_n]$ که به‌صورت بالا تعریف می‌شود را ابر مکان منگر یا ترکیب منگر از رابطه‌ها می‌نامند.

فرض کنید

$$\Delta_A^n = \{(a, ..., a) | a \in A\}$$

است. $(n+1)$-رابطه همگن $\rho \subset A^{n+1}$ را:

۱) انعکاسی می‌نامند اگر $\Delta_A^{n+1} \subset \rho$ باشد.

۲) انتقالی می‌نامند اگر $\rho[\rho...\rho] \subset \rho$ باشد.

۳) n-شبه-ترتیب می‌نامند اگر انعکاسی و انتقالی باشد.

اگر $n = 2$ باشد آن‌گاه شبه ترتیب است.

۱.۱ توابع و عملگرها

رابطه دوتایی $\rho \subset A \times B$ را یک مقداری یا تابع می‌نامند اگر برای هر $a \in A$ و هر $b_1, b_2 \in B$

$$(a, b_1) \in \rho \wedge (a, b_2) \in \rho \to b_1 = b_2$$

است. برای تابع ρ به‌جای $\rho \subset A \times B$ از عبارت $\rho : A \to B$ استفاده می‌شود. رابطه ρ تابع است اگر و فقط اگر برای هر $a \in pr_1\rho$ مجموعه $\rho\langle a\rangle$ تنها شامل یک عنصر (که با $\rho(a)$ نشان داده می‌شود) باشد. در حقیقت اگر $\rho\langle a\rangle$ تنها شامل یک عضو باشد آن‌گاه نتیجه زیر برقرار است و در نتیجه ρ تابع است.

$$(a, b_1), (a, b_2) \in \rho \Rightarrow b_1, b_2 \in \rho\langle a\rangle \Rightarrow b_1 = b_2$$

برعکس اگر دوعضو متمایز $x_1, x_2 \in \rho\langle a\rangle$ باشد آنگاه با استفاده از تابع بودن ρ نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$x_1, x_2 \in \rho\langle a\rangle \Rightarrow (a, x_1), (a, x_2) \in \rho \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع $f : A \to B$ را کامل (یا نگاشت از A بتوی B) می‌نامند اگر $pr_1 f = A$ باشد. به علاوه اگر $pr_2 f = B$ باشد، آن‌گاه f را نگاشت از A بروی B می‌نامند.
رابطه دوتایی $\rho \subset A \times B$ را به طور معکوس یک مقداری می‌نامند اگر رابطه ρ^{-1} یک مقداری باشد. تابع $f : A \to B$ را یک به یک می‌نامند اگر f^{-1} نیز تابع باشد یعنی برای هر $a_1, a_2 \in pr_1 f$

$$f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$$

است. برای دو مجموعه دلخواه A, B، $\mathcal{T}(A, B)$ نماد خانواده همه نگاشت های (کامل) از A بتوی B است. نماد $\mathcal{F}(A, B)$ خانواده همه نگاشت‌های جزیی از A بتوی B است. مجموعه همه نگاشت‌های از A بتوی B که یک به یک هستند را با $\mathcal{R}(A, B)$ را نشان می‌دهند. واضح است که

$$\mathcal{T}(A, B) \subset \mathcal{F}(A, B) \quad , \quad \mathcal{R}(A, B) \subset \mathcal{F}(A, B)$$

است. اگر $A=B$ باشد آن‌گاه مجموعه‌های بالا را با $\mathcal{T}(A),\mathcal{F}(A),\mathcal{R}(A)$ نشان می‌دهند. به آسانی دیده می‌شود که اگر $f,g\in\mathcal{F}(A)$ باشد آن‌گاه $f\circ g\in\mathcal{F}(A)$ است. بیان‌های مشابهی برای $\mathcal{T}(A),\mathcal{R}(A)$ برقرار است. همچنین سخت نیست که ببینیم برای هر $f\in\mathcal{F}(A,B)$ و مجموعه‌های دلخواه $Y_1,Y_2\in\mathfrak{B}(B)$

$$f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2),$$
$$f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2),$$
$$f^{-1}(Y_1\setminus Y_2)=f^{-1}(Y_1)\setminus f^{-1}(Y_2)$$

است. هر عنصر از مجموعه $\mathcal{F}(\times_{i=1}^{n}A_i,B)$ را یک تابع n-تایی (جزئی) یا یک n-عملگر جزئی می‌نامند. عناصر $\mathcal{T}(\times_{i=1}^{n}A_i,B)$ را توابع n-تایی کامل یا n-عملگرها می‌نامند. اگر $A=A_1=\dots=A_n=B$ باشد این مجموعه‌ها را با $\mathcal{F}(A^n,A)$ و $\mathcal{T}(A^n,A)$نشان می‌دهند. واضح است که این مجموعه‌ها تحت ترکیب منگر از توابع n-مکانی بسته اند.

تابع $f\in\mathcal{F}(\times_{i=1}^{n}A_i,B)$ را معکوس پذیر می‌نامند، اگر شرط زیر برای هر $i=1,\dots,n$ و $(\overline{a}|_ib_1),(\overline{a}|_ib_2)\in pr_1f$ برقرار باشد.

$$f(\overline{a}|_ib_1)=f(\overline{a}|_ib_2)\to b_1=b_2$$

در این‌جا $(\overline{a}|_ib)=(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n)$ است. مجموعه همه توابع n-مکانی معکوس پذیر با نماد $\mathcal{R}(\times_{i=1}^{n}A_i,B)$ نشان داده می‌شود. یک عملگر n-مکانی جزئی معکوس پذیر را شبه گروه n-تایی جزئی می‌نامند. مجموعه همه شبه گروه های n-تایی جزئی را با $\mathcal{R}(A^n,A)$ نشان می‌دهند. ترکیب منگر از توابع n-تایی معکوس پذیر (برای $n\geqslant 2$) به طور کلی یک تابع معکوس پذیر نیست.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید برای $i = ۱, ..., n$، $\sigma_i : A^n \to A$ نگاشتی است که $\sigma_i(\overline{a}) = a_۱ + ... + a_n$ است. همچنین فرض کنید $\rho : A^n \to A$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(\overline{a}) = \begin{cases} \sum_{i=۱}^{\frac{n}{۲}} (a_{۲i} - a_{۲i-۱}) & n \ is \ even, \\ (a_n - a_۱) + \sum_{i=۱}^{\frac{n-۱}{۲}} (a_{۲i} - a_{۲i-۱}) & n \ is \ odd \end{cases}$$

به راحتی نشان داده می‌شود که σ_i که $i = ۱, ..., n$ است و همچنین ρ توابع وارون پذیرند. با استفاده از تعریف ترکیب توابع ضابطه $\rho[\sigma_۱ ... \sigma_n] : A^n \to A$ به صورت $\overline{a} \mapsto ۰$ است که به وضوح وارون پذیر نیست.

تابع $I_i^n \in \mathcal{T}(A^n, A)$ که برای هر $a_۱, ..., a_n \in A$ به صورت $I_i^n(a_۱, ..., a_n) = a_i$ تعریف می‌شود را تصویر n-تایی از مجموعه A می‌نامند.

۲.۱ سیستم‌های جبری

فرض کنید $o_\xi \in \mathcal{T}(A^{n_\xi})$ یک عملگر دلخواه باشد و $\rho_n \in \mathfrak{B}(A^{m_\eta})$ یک رابطه دلخواه تعریف شده روی مجموعه A باشد. آن‌گاه n_ξ و m_η را به ترتیب $arity$ از o_ξ و ρ_η می‌نامند. سیستم جبری یعنی سیستمی به فرم $\mathfrak{U} = (A, o_۱, ..., o_p, \rho_۱, ..., \rho_p)$ که در آن A یک مجموعه و $o_۱, ..., o_p$ عملگرهای n_i-تایی روی A و $\rho_۱, ..., \rho_p$ رابطه های m_k-تایی روی A هستند. سیستم $(o_۱, ..., o_p, \rho_۱, ..., \rho_p)$را سبک $signature$، $\mathfrak{U}$ می‌نامند.

سیستم $(n_۱, ..., n_p, m_۱, ..., m_q)$ را از نوع $\mathfrak{U}$ می‌نامند. هر سیستمی به فرم $(A, o_۱, ..., o_p)$ را یک جبر می‌نامند. جبر (G, o) که o عملگر دوتایی است را گروهوار دوتایی می‌نامند. برای عملگرهای دوتایی نمادهای $., +, *, \wedge, \vee$ و برای رابطه‌های دوتایی از $\rho, \sigma, \chi, \leqslant, \sqsubset$ و غیره، استفاده می‌شود. جبر (G, o) که o عملگر n-تایی است را گروهوار n-تایی می‌نامند. اگر

$\mathfrak{U} = (A, o_1, ..., o_p, \rho_1, ..., \rho_p)$ و $\mathfrak{U}' = (A', o'_1, ..., o'_p, \rho'_1, ..., \rho'_p)$ سیستم های جبری از یک نوع باشند، آن‌گاه نگاشت $P : A \longrightarrow A'$ را همریختی از $\mathfrak{U}$ به $\mathfrak{U}'$ می‌نامند اگر:

۱) برای هر $\xi \in \{1, ..., n\}$ و $x_1, ..., x_{n_\xi} \in A$ تساوی زیر را برقرار باشد.

$$P(o_\xi(x_1, ..., x_{n_\xi})) = o'(P(x_1), ..., P(x_{n_\xi})).$$

۲) برای هر $\eta \in \{1, ..., m\}$ و $x_1, ..., x_{m_\eta} \in A$ نتیجه زیر برقرار باشد.

$$(x_1, ..., x_{m_\eta}) \in \rho_\eta \longleftrightarrow (P(x_1), ..., P(x_{m_\eta})) \in \rho'_\eta.$$

اگر P یکریختی باشد، یعنی P همریختی یک به یک از A بروی A' باشد آن‌گاه $\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{U}'$ یکریخت اند. این مطلب را با نماد $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ نشان می‌دهند.

نیم گروه، گروهوار دوتایی $(G, .)$ با عملگر شرکت پذیر است. یعنی گروهوار $(G, .)$ که در تساوی $(xy)z = x(yz)$ صدق می‌کند.

عنصر g از نیم‌گروه $(G, .)$ را منظم می‌نامند اگر $x \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $gxg = g$ باشد. نیم‌گروهی که همه عناصر آن منظم باشند را منظم می‌نامند.

دو عنصر $g, \overline{g}$ را معکوس می‌نامند اگر $g\overline{g}g = g$ و $\overline{g}g\overline{g} = \overline{g}$ باشد.

یک نیم‌گروه معکوس، نیم‌گروه منظمی است که برای هر عنصر g، یک عنصر مشخص یکتا $\overline{g}$ وجود دشته باشد به طوری که $g, \overline{g}$ معکوس باشند. عنصر $g \in G$ را خودتوان می‌نامند اگر $gg = g$ باشد. می‌توان نشان داد که یک نیم‌گروه معکوس است اگر و فقط اگر منظم باشد و هر دو عنصر خودتوان e, f از آن با یکدیگر جابه جا شوند یعنی $ef = fe$ باشد. در حقیقت اگر G نیم‌گروه معکوس باشد آن‌گاه طبق تعریف منظم است. پس باید نشان دهیم هر دو عضو خودتوان با یکدیگر جابجا می‌شوند. فرض کنید f, e دو عضو خودتوان باشند. نشان

می‌دهیم ef و fe هر دو وارون‌های fe هستند. آن‌گاه با توجه به یکتایی عضو وارون نتیجه می‌گیریم $ef = fe$ است. از دو تساوی زیر نتیجه می‌گیریم ef وارون fe است.

$$(ef)(fe)(ef) = e(ff)(ee)f = (efe)f = ef$$

$$(fe)(ef)(fe) = f(ee)(ff)e = (fef)e = fe$$

از تساوی زیر نتیجه می‌گیریم fe وارون fe است.

$$(fe)(fe)(fe) = (fef)(efe) = fe$$

برعکس فرض کنید G نیم‌گروه منظمی باشد که هر دو عضو خودتوان آن جابجایی‌اند. باید نشان دهیم هر عضو وارون یکتا دارد. فرض کنید g عضو دلخواهی از G باشد و x, y وارون‌های آن باشند پس طبق تعریف

$$xgx = x \quad , \quad gxg = g$$

$$ygy = y \quad , \quad gyg = g$$

نشان می‌دهیم عناصر yg, gy, gx, xg خودتوان‌اند.

$$(yg)(yg) = (ygy)g = yg \quad , \quad (gy)(gy) = g(ygy) = gy$$

$$(xg)(xg) = (xgx)g = xg \quad , \quad (gx)(gx) = (gxg)x = gx$$

طبق فرض خودتوان‌ها با یکدیگر جابجا می‌شوند پس

$$(xg)(yg) = (yg)(xg) \Rightarrow xg = yg$$

$$(gy)(gx) = (gx)(gy) \Rightarrow gx = gy$$

است. حال $y = (yg)y = (xg)y = x(gy) = xgx = x$ است و اثبات کامل می‌شود.

همانی (عنصر خنثی) از گروهوار $(G, .)$ عنصر $e \in G$ است که برای هر $g \in G$ ، $ge = eg = g$ است.

گروه، نیم‌گروه $(G, .)$ است که معادلات $ax = b$ و $ya = b$ برای هر $a, b \in G$ حل پذیر باشد. این جواب ها به صورت یکتا مشخص می‌شوند. یک گروه می‌تواند به عنوان یک جبر $(G, ., ^{-۱}, e)$ از نوع $(۲, ۱, ۰)$ که در سه شرط زیر صدق می‌کند، در نظر گرفته شود.

$$(xy)z = x(yz),$$

$$xe = ex = x,$$

$$xx^{-۱} = x^{-۱}x = e.$$

فصل ۲

$(۲, n)$-نیم‌گروه‌ها از توابع

در این فصل عملگرهای دوتایی را روی مجموعه $\mathcal{F}(A^n, A)$ شامل همه توابع n-مکانی جزئی روی A تعریف می‌کنیم. چنین ترکیب‌هایی (که حالا ابرمکان‌های مان[۱] نامیده می‌شوند) برای اولین بار توسط مان در [۳۹] مطالعه شد. پس از آن توسط نویسندگان زیادی از جمله [۱] و [۵۷] و [۷۱] نیز مطالعه شد. بررسی توابع چند مکانی جزئی توسط روش‌های جبری، نقش مهمی در ریاضیات نوین بازی می‌کند. عملگرهای گوناگونی را روی مجموعه توابع که به طور طبیعی تعریف می‌شوند مورد توجه قرار می‌دهیم. عملگر پایه برای توابع n-مکانی، عملگر $(n+۱)$-تایی O است. اما عملگر دیگری وجود دارد که به طور طبیعی تعریف شده است و ارزش بررسی دارد. در این‌جا ما ترکیب‌های دوتایی مان $\oplus_۱, ..., \oplus_n$ از توابع n-مکانی جزئی را مورد توجه قرار می‌دهیم. همچنین روش‌های نمایش چنین جبرهایی را توسط توابع n-مکانی ارائه می‌دهیم.

---

[۱] $Mann$

۱.۲ $(۲,n)$-نیم‌گروه‌ها و نمایش‌هایشان

در این بخش نمایش‌های $(۲,n)$-نیم‌گروه‌ها یعنی مجموعه‌هایی با n عملگر دوتایی شرکت پذیر را توسط توابع n-مکانی جزئی بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم هر چنین نمایشی اجتماعی از خانواده‌ای از ساده‌ترین نمایش‌های القا شده توسط جفت‌های مشخص است.

روی مجموعه $\mathcal{F}(A^n,A)$ از همه توابع n-مکانی تعریف شده روی مجموعه A، n عملگر دوتایی $\oplus_۱,...,\oplus_n$را که ابر مکان‌های مان نامیده می‌شوند در نظر می‌گیریم به طوری که برای همه $f,g\in\mathcal{F}(A^n,A)$ و $a_۱,...,a_n\in A$ و $i=۱,...,n$

$$(f\oplus_i g)(a_۱,...,a_n)=f(a_۱,...,a_{i-۱},g(a_۱,...,a_n),a_{i+۱},...,a_n)$$

است یا به صورت خلاصه

$$(f\oplus_i g)(a_۱^n)=f(a_۱^{i-۱},g(a_۱^n),a_{i+۱}^n)$$

است. چون همه ابر مکان‌های مان شرکت پذیرند، جبر $(\Phi,\oplus_۱,...,\oplus_n)$ که $\Phi\subset\mathcal{F}(A^n,A)$ هست را $(۲,n)$-نیم‌گروه از توابع n-مکانی می‌نامند. در این حالت وقتی $\Phi\subset\mathcal{T}(A^n,A)$ باشد یعنی Φ مجموعه‌ای از عملگرهای n-تایی باشد این جبر را $(۲,n)$-نیم‌گروه ازعملگرهای n-تایی می‌نامند.

بررسی شرکت پذیری ترکیب $\oplus_i$

$$((f\oplus_i g)\oplus_i h)(a_۱,...,a_n)=(f\oplus_i g)(a_۱,...,a_{i-۱},h(a_۱,...,a_n),a_{i+۱},...,a_n)$$

$$=f(a_۱,...,a_{i-۱},g(a_۱,...,a_{i-۱},h(a_۱,...,a_n),a_{i+۱},...,a_n),a_{i+۱},...,a_n)\quad(۱)$$

$$(f\oplus_i(g\oplus_i h))(a_۱,...,a_n)=f(a_۱,...,a_{i-۱},(g\oplus_i h)(a_۱,...,a_n),a_{i+۱},...,a_n)$$

$$f(a_۱,...,a_{i-۱},g(a_۱,...,a_{i-۱},h(a_۱,...,a_n),a_{i+۱},...,a_n),a_{i+۱},...,a_n)\quad(۲)$$

حال از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $\oplus_i$ شرکت پذیر است.

جبر مجرد $(G, \oplus_۱, ..., \oplus_n)$که $\oplus_۱, ..., \oplus_n$ عملگرهای دوتایی شرکت پذیر و تعریف شده روی G هستند را $(۲, n)$-نیم‌گروه می‌نامند [۲]. هر یک از همریختی‌هایش بتوی $(۲, n)$-نیم‌گروهی از توابع n-مکانی (عملگرهای n-تایی) را نمایش توسط توابع n-مکانی (عملگرهای n-تایی) می‌نامند. نمایشی که یک به یک باشد را وفادار می‌نامند. $(۲, n)$-نیم‌گروهی که برای آن نمایش وفادار وجود دارد را قابل نمایش می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۲. $(۲, n)$-نیم‌گروه $(G, \oplus_۱, ..., \oplus_n)$ را یکانی می‌نامند اگر شامل عناصر $e_۱, ..., e_n$ که انتخاب‌گر نام دارند باشد به طوری که برای همه $g \in G$ و $i, k = ۱, ..., n$ که $i \neq k$ است

$$g \oplus_i e_i = e_i \oplus_i g = g \qquad ۵.۱.۲$$

$$e_k \oplus_i g = e_k \qquad ۵.۱.۳$$

باشد.

عبارت به فرم $(...((x \oplus_{i_۱} y_۱) \oplus_{i_۲} y_۲)...) \oplus_{i_k} y_k$ را به اختصار به صورت $x \oplus_{i_۱} y_۱ \oplus_{i_۲} ... \oplus_{i_k} y_k$ یا به صورت $x \oplus_{i_۱}^{i_k} y_۱^k$ می‌نویسیم.

نماد $\mu_i(\oplus_{i_۱}^{i_s} x_۱^s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_i(\oplus_{i_۱}^{i_s} x_۱^s) = \begin{cases} x_k \oplus_{i_{k+۱}}^{i_s} x_{k+۱}^s & \exists k \in \{۱, ..., s\} | i \neq i_۱, ..., i \neq i_{k-۱}, i = i_k, \\ \emptyset & O.W \end{cases}$$

برای مثال

[۲] برای $n = ۱$ یک نیم‌گروه دلخواه است.

$$\mu_۱(\oplus_۲ x \oplus_۱ y \oplus_۳ z) = y \oplus_۳ z \quad , \quad \mu_۲(\oplus_۲ x \oplus_۱ y \oplus_۳ z) = x \oplus_۱ y \oplus_۳ z$$

$$\mu_۳(\oplus_۲ x \oplus_۱ y \oplus_۳ z) = z \quad , \quad \mu_۴(\oplus_۲ x \oplus_۱ y \oplus_۳ z) = \emptyset$$

ابر مکان منگر از توابع n-مکانی $f, g_۱, ..., g_n$ روی مجموعه A را با نماد $f[g_۱...g_n]$ یا به صورت کوتاه‌شده با نماد $f[g_۱^n]$ نشان می‌دهند و برای هر $a_۱, ..., a_n \in A$ به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$f[g_۱^n](a_۱^n) = f(g_۱(a_۱^n), ..., g_n(a_۱^n)) \qquad ۵.۱.۴$$

فرض می‌کنیم سمت راست و چپ ۵.۱.۴ به طور همزمان تعریف شده یا تعریف نشده است. پیش‌تر $I_۱^n, ..., I_n^n$ را به عنوان نمادهای تصویرهای n-مکانی معرفی کردیم. یعنی توابع n-مکانی کاملی که برای هر $a_۱, ..., a_n \in A$ و $i = ۱, ..., n$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_i^n(a_۱, ..., a_n) = a_i$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که برای همه توابع n-مکانی تعریف شده روی A تساوی‌های زیر برای هر $i, k = ۱, ..., n$ که $i \neq k$ است برقرار است.

$$f[I_۱^n, ..., I_n^n] = f \qquad ۵.۱.۶$$

$$I_i^n[g_۱...g_n] = g_i \circ \Delta_{pr_۱ g_۱ \cap ... \cap pr_۱ g_n} \qquad ۵.۱.۷$$

$$f \oplus_i g = f[I_۱^n ... I_{i-۱}^n g I_{i+۱}^n ... I_n^n] \qquad ۵.۱.۸$$

$$f[g_۱^n][h_۱^n] = f[g_۱[h_۱^n]...g_n[h_۱^n]] \qquad ۵.۱.۹$$

$$(f \oplus_i g)[h_۱^n] = f[h_۱^{i-۱} g[h_۱^n] h_{i+۱}^n] \qquad ۵.۱.۱۰$$

$$f[g_۱^n] \oplus_i h = f[(g_۱ \oplus_i h)...(g_n \oplus_i h)] \qquad ۵.۱.۱۱$$

$$g \oplus_i I_i^n = I_i^n \oplus_i g = g \qquad ۵.۱.۱۲$$

$$I_k^n \oplus_i g = I_k^n \circ \Delta_{pr_۱ g} \qquad ۵.۱.۱۳$$

گزاره ۲.۱.۲. برای همه توابع n-مکانی $f, g_۱, ..., g_n \in \mathcal{F}(A^n, A)$ و $\oplus_{i_۱}, ..., \oplus_{i_k}$

$$f \oplus_{i_۱}^{i_s} g_۱^s = f[(I_۱^n \oplus_{i_۱}^{i_s} g_۱^s)...(I_n^n \oplus_{i_۱}^{i_s} g_۱^s)] \qquad ۵.۱.۱۴$$

است.

اثبات. ۵.۱.۱۴ را با استقرا ثابت می‌کنیم. وقتی $s = ۱$ باشد آن‌گاه با استفاده از تساوی‌های ۵.۱.۸ و ۵.۱.۱۳ تساوی‌های زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} f \oplus_{i_۱} g_۱ &= f[I_۱^n...I_{i_۱-۱}^n g_۱ I_{i_۱+۱}^n...I_n^n] \\ &= f[(I_۱^n \circ \Delta_{pr_۱ g_۱})...(I_{i_۱-۱}^n \circ \Delta_{pr_۱ g_۱}) g_۱ (I_{i_۱+۱}^n \circ \Delta_{pr_۱ g_۱})...(I_n^n \circ \Delta_{pr_۱ g_۱})] \\ &= f[(I_۱^n \oplus_{i_۱} g_۱)...(I_{i_۱-۱}^n \oplus_{i_۱} g_۱)(I_{i_۱}^n \oplus_{i_۱} g_۱)(I_{i_۱+۱}^n \oplus_{i_۱} g_۱)...(I_n^n \oplus_{i_۱} g_۱)] \\ &= f[(I_۱^n \oplus_{i_۱} g_۱)...(I_n^n \oplus_{i_۱} g_۱)] \end{aligned}$$

بنابراین برای $s = ۱$ شرط ۵.۱.۱۴ برقرار است.

فرض کنید این شرط برای $s = k$ نیز برقرار باشد. یعنی تساوی زیر برقرار باشد.

$$f \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k = f[(I_۱^n \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k)...(I_n^n \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k)]$$

بنابراین با استفاده از این فرض و تساوی ۵.۱.۱۱ تساوی‌های زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} f \oplus_{i_۱}^{i_{k+۱}} g_۱^{k+۱} &= (f \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k) \oplus_{i_{k+۱}} g_{k+۱} = f[(I_۱^n \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k)...(I_n^n \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k)] \oplus_{i_{k+۱}} g_{k+۱} \\ &= f[((I_۱^n \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k) \oplus_{i_{k+۱}} g_{k+۱})...((I_n^n \oplus_{i_۱}^{i_k} g_۱^k) \oplus_{i_{k+۱}} g_{k+۱})] \\ &= f[(I_۱^n \oplus_{i_۱}^{i_{k+۱}} g_۱^{k+۱})...(I_n^n \oplus_{i_۱}^{i_{k+۱}} g_۱^{k+۱})] \end{aligned}$$

پس ۵.۱.۱۴ برای $s = k + ۱$ نیز ثابت می‌شود. □

سیستم جبری $(\Phi, \oplus_۱, ..., \oplus_n, \chi_\Phi)$ را $(۲, n)$-نیم‌گروه شبه-مرتب تصویری از توابع n-مکانی می‌نامند اگر $(\Phi, \oplus_۱, ..., \oplus_n)$، $(۲, n)$-نیم‌گروه از توابع n-مکانی روی A

$$\chi_\Phi = \{(f, g) \in \Phi \times \Phi | pr_۱ f \subset pr_۱ g\}$$

باشد. $(۲, n)$-نیم‌گروه منگر $(\Phi, O, \oplus_۱, ..., \oplus_n)$ از توابع n-مکانی را اساسا مرتب گویند اگر روی Φ رابطه ζ_Φ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$(f, g) \in \zeta_\Phi \iff f \subset g$$

مراجع

[1] V. D. Belousov, *Systems of orthogonal operations*, Math. USSR, Sb. (1969) 172:32-52.

[2] M. I. Burtman, *Congruences of the Menger algebra of linear mappings*, (Russian), Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, ser. Fiz-Tekh. Mat. Nauk **3** (1984), 8-14.

[3] M. I. Burtman, *Finitely generated subalgebras of the Menger algebra of linear mappings*, (Russian), Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, ser. Fiz-Tekh. Mat. Nauk **2** (1984), 3-9.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابرشرکت‌پذیری .... superassociative

ابرمکان .... superposition

ابرمکان مان .... Mann's superposition

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

جبر کلمات .... algebra of words

الفبا .... alphabet

پاد متقارن .... antisymmetric

عملگر n-تایی .... n-ary operation

فهرست نمادها