abstract– درجه جابجایی یک گروه یکی از مفاهیم تعریف شده در نظریه احتمالی گروه هاست، که می تواند نقش مهمی در معرفی خواص و برخی ساختار آن گروه داشته باشد. این درجه برای اولین بار در سال ۱۹۴۴ توسط میلر معرفی شد. که با استفاده از آن توانست احتمال جابجا شدن دو عنصر دلخواه در یک گروه متناهی را به دست آورد. با توجه به نقش مستقیمی که کلاس های تزویج و سرشت های تحویل نا پذیر یک گروه در محاسبه درجه جابجایی آن دارند، با به کارگیری نتایج و خواص این مفاهیم در محاسبات، می توان نتایج جدید تری را برای درجه جابجایی به دست آورد. همچنین ارتباط بین این احتمال و مفهوم ایزوکلینیسم گروه ها می تواند نقش اساسی در رده بندی گروه ها داشته باشد. احتمال اینکه دو زیرگروه دلخواه در یک گروه متناهی باهم جابجا شوند چیست؟ در سال ۲۰۰۹ ماریوس مفهوم درجه جابجایی زیرگروه گروه متناهی G که با نماد $sd(G)$ نمایش داده می شود را معرفی کرد. با استفاده از این مفهوم احتمال اینکه زیر گروه های گروه متناهی G با هم جابجا شوند، اندازه گیری می شود. همچنین فرمول های صریح برای برخی کلاس های خاص گروه متناهی بدست آمده است. در سال ۲۰۱۰ ماریوس با تعریف مفهوم درجه جابجایی زیر گروه نسبی زیرگروه G و زیر گروه H از آن که با نماد $sd(H, G)$ نمایش داده می شود این مفهوم را تعمیم داد. که با استفاده از این مفهوم می توان احتمال اینکه زیرگروه H با زیر گروه G باهم جابجا شوند را اندازه گیری کرد. در این پایان نامه به معرفی درجه جابجایی یک گروه متناهی و تعمیم های حاصل از آن پرداخته شده است. این تعمیم ها عبارت است از، درجه جابجایی نسبی، درجه جابجایی زیر گروه، درجه جابجایی زیر گروه نسبی گروه های متناهی می باشد. هر کدام از این تعاریف را می توان به طور کامل معرفی کرده و کران های مختلفی را برای درجات معرفی شده ارایه می دهیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

یکی از مسایلی که در چند دهه اخیر مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفته است، وارد کردن نظریه احتمال به نظریه گروه ها می باشد. آنها سعی کرده اند با تعریف یک احتمال مناسب در یک موضوع خاص، نتایجی را به دست بیاورند که در اثبات قضایای مختلف موضوع مربوطه به کمک آنها بیاید.
با آنکه قبل از دهه شصت قرن بیستم در مواردی برخی ریاضی دانان احتمال را در نظریه گروه ها به کار گرفته بودند اما از سال ۱۹۶۵ به بعد اردوش همراه با رنی [۷]، تران[۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] و هال [۵]، [۶]، به طور جدی بحث نظریه احتمالی گروه ها را پیگیری کردند و توانستند مسایل آماری و احتمالی مختلفی را در ارتباط با نظریه گروه ها مطرح کنند. به عنوان مثال احتمال مربعی بودن یک گروه متناهی که حالت ایده آل آن وقتی است که توان ۲ تمام عناصر دقیقا برابر با خود گروه باشد.

یکی از احتمالاتی که برای گروه ها توسط میلر [۲۹]، در سال ۱۹۴۴ معرفی شد، احتمال جابجایی دو عنصر در یک گروه متناهی بود. او برای یک گروه متناهی مانند G، تعداد جفت های مرتبی را در $G \times G$ را در نظر گرفت که با هم جابه جا می شوند، سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه گروه G تقسیم کرد و عدد حاصل را درجه جابجایی گروه G نامید. در سال ۱۹۷۳ گاستافسون [۱۷]، با ارایه یک فرمول توانست ارتباطی بین احتمال معرفی شده و تعداد کلاس های تزویج گروه برقرار کند. او نشان داد که درجه جابجایی یک گروه برابر با حاصل تقسیم تعداد کلاس های تزویج آن گروه بر مرتبه گروه است. بنابراین هر اطلاعاتی که درباره تعداد کلاس های تزویج به دست آمده باشد می تواند در اینجا نیز به کار گرفته شود. به عنوان مثال، اردوش و تران در [۱۱] و نیومن در [۳۰]، به طور مستقل نشان دادند که تعداد کلاس های تزویج G، حداقل $log_2 log_2 |G|$ می باشد. حال با تقسیم این عدد بر مرتبه گروه، یک کران پایین برای درجه جابجایی گروه G حاصل می شود. بنابراین نتایجی که درباره کلاس های تزویج در [۲]، [۱۵]، [۱۶] و ...به دست آمده اند، قابل استفاده در درجه جابجایی می باشند.

یکی از قدیمی ترین نتایجی که برای درجه جابجایی گروه ها به دست آمده است، کران بالای

$\frac{۵}{۸}$ برای درجه جابجایی گروه های غیر آبلی می باشد، که توسط گاستافسون [۱۷]، ارایه گردید و با توجه به اینکه یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۸، این کران را می گیرد بنابراین به نظر می رسد که این کران بالا یک کران دقیق است.

یکی از افرادی که بیشترین کار را روی درجه جابجایی انجام داده است، پائول لسکات می باشد [۲۳]، [۲۴]، [۲۵]،[۲۶] ، [۲۷] . او با استفاده از مفهوم ایزوکلینیسم گروه ها و ارتباط آن با درجه جابجایی توانست گروه هایی که درجه جابجایی آنها حداقل $\frac{۱}{۲}$ بود را رده بندی کند. او نشان داد گروه هایی با احتمال بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$، گروه های پوچ توان از کلاس حداکثر ۲ هستند.

در سال ۲۰۰۹ ماریوس [۳۵]، مفهوم درجه جابجایی زیرگروه گروه متناهی معرفی کردند. در این تعریف احتمال جابجا شدن زیرگروه های یک گروه مورد بررسی قرار گرفت. او برای یک گروه متناهی مانند G، تعداد جفت های مرتبی را در $L(G) \times L(G)$ در نظر گرفت که با هم جابجا می شوند. سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه $L(G)$ تقسیم کرد و عدد حاصل را درجه جابجایی زیر گروه گروه G نامید.

در سال ۲۰۰۷ عرفانیان، لسکات و رضائی [۱۴]، مفهوم درجه جابجایی نسبی را برای یک گروه متناهی و یک زیر گروه از آن معرفی کردند. در این تعریف درجه جابجایی یک گروه نسبت به یک زیر گروه از آن به دست می آید و با توجه به خواصی که زیرگروه می تواند داشته باشد این درجه با استفاده از آن خواص قابل محاسبه می باشند. ارایه کران بالا و تعمیم قضایای درجه جابجایی با استفاده از تعریف جدید، نتایجی بود که توسط آنها صورت گرفت.

حالت کلی تر درجه جابجایی زیرگروه، درجه جابجایی زیرگروه نسبی گروه متناهی است که در سال ۲۰۱۰ توسط ماریوس[۳۵]، معرفی شد. آنها برای محاسبه درجه جابجایی زیر گروه نسبی یک گروه متناهی مانند G و یک زیر گروه از آن مانند H ، تعداد جفت های مرتبی را در $L(H) \times L(G)$، در نظر گرفتند که با هم جا به جا می شوند. سپس تعداد حاصل شده را بر مرتبه $L(H) \times L(G)$ تقسیم کردند و عدد حاصل را درجه جابجایی زیر گروه نسبی گروه G نامیدند.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می باشد. در فصل اول مفاهیم مقدماتی و پیشنیازهای مورد استفاده در فصل های بعد را بیان خواهیم کرد. فصل دوم اختصاص به معرفی درجه جابجایی گروه های متناهی و تعمیم آن دارد که در دو بخش جداگانه ی درجه جابجایی و درجه جابجایی نسبی عنوان خواهیم کرد. در این فصل برخی نتایج به دست آمده درباره درجه جابجایی و درجه جابجایی نسبی که توسط لسکات[۲۶] و عرفانیان و سایر مولفین[۱۴]، اثبات شده اند را ارایه خواهیم کرد. در فصل سوم به معرفی درجه جابجایی زیرگروه گروه های متناهی و تعمیم آن دارد که در دو بخش

جداگانه ی درجه جابجایی زیرگروه و درجه جابجایی زیر گروه نسبی که توسط ماریوس [۳۵]، اثبات شده اند را ارایه خواهیم کرد.

فصل ۱
مقدمات و پیش نیازها

در این فصل قصد داریم تعاریف و نتایج مقدماتی که مورد نیاز در فصل های بعدی می باشد را بیان کنیم. در بخش اول چند مفهوم مقدماتی را بیان کرده و بعضی از خواص آنها را که مورد نیاز در این پایان نامه می باشد،عنوان می کنیم. در بخش دوم مختصری از درجه جابجایی و درجه جابجایی نسبی گروه ارایه خواهیم داد و در بخش سوم مفهوم گراف و گراف ناجابجایی و خواص آن را ارایه خواهیم کرد.

۱.۱ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه ای غیر تهی باشد و به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x * g$ نشان می دهیم وجود داشته باشد به طوری که

(الف) به ازای هر x از X، $x * 1 = x$ و

(ب) به ازای هر g_1، g_2 از G و هر x از X، $x * (g_1 * g_2) = (x * g_1) * g_2$.

در این صورت گوییم G بر X عمل می کند و $*$ را عمل G بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به جای $x * g$ معمولا خواهیم نوشت xg یا x^g. عمل G بر X را با نماد $(G|X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in G$، $C_x = \{x^g | g \in G\}$ را رده تزویج x در G گوییم. تعداد G را با نماد $k(G)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۳.۱.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ نماینده های رده های تزویج گروه G باشند، آنگاه $|C_{x_i}| = [G : C_G(x_i)]$ و*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$$

که آن را معادله رده ای گروه G گوییم.

برهان. به رجب زاده قضیه ۷-۱-۲ صفحه۲۵۱و نتیجه ۷-۱-۴ صفحه ۲۵۲ مراجعه شود. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت مرکزساز H در G را با نماد $C_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_G(H) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in H\}.$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت مرکز G را با نماد $Z(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Z(G) = C_G(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}.$$

به سادگی می توان نشان داد

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد. در این صورت نرمالساز H در G را با نماد$N_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}.$$

که در آن $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$ مزدوج H در G نامیده می شود.

تعریف ۷.۱.۱. گروه G را پوچ توان گوییم، هرگاه دارای یک سری به صورت زیر باشد

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$$

که در آن به ازای هر $0 \leq i \leq n$ ، $G_i \trianglelefteq G$ و $\frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$.

یک چنین سری را سری مرکزی گوییم و طول کوتاه ترین سری مرکزی G را رده پوچ توانی G گوییم.

مثال ۸.۱.۱. گروه D_8 پوچ توان است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم G گروهی دلخواه باشد. تعریف میکنیم $\gamma_1(G) = G$ و به ازای هر $i \geq 1$ ، $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$. یک سری به صورت زیر می توان داشت

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \ldots \supseteq \gamma_i(G) \supseteq \ldots$$

که آن را سری مرکزی پایینی گروه G می گوییم.

همچنین برای گروه G تعریف می کنیم$Z_0(G) = 1$ و$Z_1(G) = Z(G)$ و به ازای هر $i \geq 1$،

$$\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\big(\frac{G}{Z_i(G)}\big).$$

به سادگی دیده می شود

$$1 = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq \ldots \subseteq Z_i(G) \subseteq \ldots$$

که آن را سری مرکزی بالایی گروه G می نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم p عددی اول باشد. در این صورت گروه G را یک p- گروه می نامیم، اگر مرتبه هر عنصر G توانی از p باشد. زیرگروه H از گروه دلخواه G را یک p-زیرگروه می نامیم، هرگاه H یک p- گروه باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. گروه آبلی G را یک p- گروه آبلی مقدماتی گوییم هرگاه مرتبه هر عنصر حداکثر p باشد.همچنین گروه متناهی G را یک p- گروه بسیار ویژه گوییم هرگاه $Z_p \cong Z(G) = G'$ و $\frac{G}{Z(G)}$ یک p- گروه آبلی مقدماتی باشد.

لم ۱۲.۱.۱.

مراجع

[1] *A.Abdollahi,Engle graphassociated with a group,*J.Algebra *318(2007)680-691.*

[2] *A.Abdollahi ,S.Akbari and H.R.Maimani,Non-commuting graph of a group,*J.Algebra.*298(2006) 468-492.*

[3] *A.Abdollahi and A.Mohammadi Hassanabadi,Non-cyclic graph of a group* ,Comm.Algebra *35 (2007) 2057-2081.*

[4] *E.A.Bertram,M.Herzog and A.Mann,On a graph related to conjugacy classes of groups*Bull.London Math.Soc.*,22 (6) (1990) 569-575.*

[5] *P.Erdos and P.Turan,On some problems of statistical group theory,* Acta Math.Acad.Sci.Hung. *19 (1968) 413-435.*

[6] *A.Erfanian,B.Tolue and N.H.Sarmin,Some consideration on the n-th commutativity degrees of finite groups,to appear in Ars combin.*

[7] *F.Grunewald,B.Kunyavskii,D.Nikolova and E.Plotkin,Two-variable identities in groups and Lie algebras,*J.Math.Sci.(N.Y.) *116(1) (2003) 2972-2981.*

[8] *W.H.Gustafson,*What is the probability that two groups elements commute?,Amer.Math.Monthly*,80(1973)1031-1304.*

[9] *P.Hall,*The classification of prime-power groups,J.reine ang.Math*, 182(1940),130-141.*

[10] *N.H.Hekster,*On the structure of n-isoclinism classes of groups,J.Pure Appl. Algebra*. 40 (1986), 63-85.*

[11] *A.R.Moghaddamfar,W.J.Shi,W.Zhou and A.R.Zokayi,On noncommuting graph associated with a finite group,*Siberian Math.J.*, 46(2) (2005) 325-332.*

[12] *N.M.Mohd Ali and N.H.Sarmin, On some problems in group theory of probabilistic nature,*Tecnical Report,Department of Mathematics,Univercity Teknologi Malaysia,johor,Malaysia,*(2006).*

[13] *B.H.Neumann,A problem of Paul Erdos on groups,* J.Aust.Math.Soc.Ser.*A 21 (4) (1976) 467-472.*

[14] *A. Jung,* Cartesian Closed Categories of Domains*, volume 66 of CWI Tracts. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989, 107 pp.*

[15] *J.S.Williams,Prime graph components of finite groups,*J.Algebra *69 (2) (1981) 487-513.*