

بسم الله الرحمن الرحيم

# حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

وحید دامن افشان

مدرس دانشگاه کرمانشاه

انتشارات دانشگاه کرمانشاه

۱۴۰۱

سرشناسه	: دامن افشان، وحید، ۱۳۰۰
عنوان	: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی
مشخصات نشر	: کرمانشاه، دانشگاه کرمانشاه، ۱۴۰۱=۲۰۲۲ م.
مشخصات ظاهری	: ع+۲۷۳ ص. مصور، جدول.
فروست	: دانشگاه کرمانشاه؛ ۲۳۶
شابک	: ۹-۰۰-۰۰۰۰-۶۰۰-۹۷۸
یادداشت	: پشت جلد به انگلیسی: Calculus and Analytic Geometry
یادداشت	: کتاب نامه
یادداشت	: نمایه
موضوع	: علوم پایه
شناسه افزوده	: دانشگاه کرمانشاه
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۳ ۶ آ ۵ / ۲ / ۸۰ / ۲ XX
رده بندی دیویی	: ۵۰۰ / ۵



دانشگاه فلان

۲۳۶

انتشارات دانشگاه کرمانشاه

عنوان کتاب: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی  
 تألیف: وحید دامن افشان  
 ویراستار ادبی: علی جبرائیلی  
 صفحه آرا: وحید دامن افشان  
 ناشر: دانشگاه کرمانشاه  
 تاریخ و نوبت چاپ: ۱۴۰۱ - هفتم  
 شمارگان: ۱۰۰۰  
 قیمت: ۷۸۰۰۰ تومان  
 شابک: ۹-۰۰-۰۰۰۰-۶۰۰-۹۷۸  
 قطع: وزیری  
 چاپخانه: زلال  
 مراکز پخش: بوستان، گلستان

مسئولیت درستی مطالب به عهده نویسنده است.

حق چاپ برای ناشر محفوظ است.

تقدیم به

همه آنهایی که می‌خواهند بیشتر بدانند.





## پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد و اهمیت روزافزون ریاضیات عمومی در کمک به درک و توجیه پدیده‌های علمی و نیز نظر به اینکه کتاب‌های ریاضی‌ای که تاکنون به زبان فارسی در رابطه با موضوع ریاضیات عمومی ترجمه یا تالیف شده است، نیازهای فعلی جامعه ریاضی و علمی را برآورده نمی‌کند، تصمیم به تالیف کتاب حاضر گرفته شد.

سطح این کتاب به گونه‌ای است که برای دانشجویان سال اول دوره کارشناسی رشته ریاضی و دانشجویان کارشناسی رشته‌های فیزیک، مکانیک و سایر رشته‌های مرتبط قابل استفاده است. از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات عمومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

کتاب حاضر از شش فصل تشکیل شده است. در فصل اول، مفاهیم و مقدمات اولیه مورد بررسی قرار گرفته و نیز قضیه اساسی وجودی و منحصر بفردی جواب بیان شده است.

در فصل دوم، مباحث و مطالب فصل اول، روی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسعه داده شده است. همچنین در این فصل، سه روش مختلف برای حل سیستم معادلات ارائه شده است. لازم به ذکر است که روش حل سیستم معادلات با استفاده از روش جردن، بیشتر برای دوره‌های کارشناسی ارشد آورده شده است. لذا برای دوره‌های کارشناسی می‌توان از مطالعه این

روش، چشم‌پوشی کرد. در ادامه فصل، معادلات دیفرانسیل مرتبه  $n$ ام و قضیه‌های مربوط به آن، بررسی شده است.

فصل سوم در ارتباط با مسایل مقدار مرزی و نظریه اشتورم است. در این فصل، قضیه‌های اساسی در ارتباط با مسایل مقدار مرزی، از جمله قضیه مقایسه‌ای و قضیه تفکیک آورده شده است.

در فصل چهارم، سیستم‌های دینامیکی معرفی شده است. تعاریف و مفاهیم نقاط ثابت، پایداری نقاط ثابت و تصویر فاز، با بیانی ساده و روان ارایه شده است.

فصل پنجم، درباره سیستم‌های دینامیکی خطی در صفحه بحث می‌کند. به بیان دقیق‌تر، سیستم‌های خطی متعارف و سیستم‌های خطی ساده در صفحه، بیان و تصاویر فاز مربوط به آن‌ها مورد کاوش قرار گرفته است.

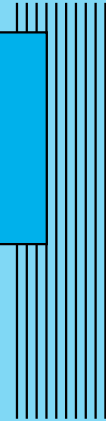
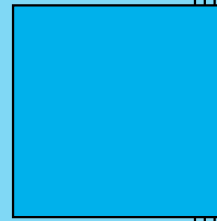
فصل ششم درباره سیستم‌های غیرخطی در صفحه است. در واقع این فصل، دربرگیرنده مطالب تکمیلی فصل پنجم است. بیشتر مطالب این فصل، برای دوره‌های تحصیلات تکمیلی مناسب است.

از ویژگی‌های این کتاب، توجه به سرفصل‌های درس نظریه ریاضیات عمومی در دوره کارشناسی است؛ به گونه‌ای که تمامی سرفصل‌های مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری با بیانی ساده و قابل فهم آورده شده است. همچنین با توجه به تعدد مثال‌ها، کتاب به صورت خودخوان نیز قابل استفاده است.

امید است که خوانندگان گرامی، نظرها و پیشنهادهای خود را با ما در میان گذاشته تا در چاپ‌های بعدی موجب غنی‌تر شدن کتاب گردد.

وحید دامن‌افشان

کرمانشاه، تابستان ۱۴۰۱



# فهرست مطالب

پیش‌گفتار ث

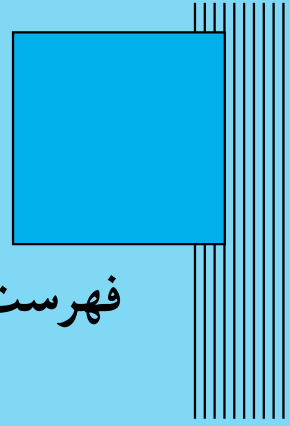
فهرست نمادها ح

۱ مشتق و کاربرد آن در علوم مهندسی ا

- ۱.۱ یادآوری حدهای یک‌طرفه و کاربرد آن‌ها . . . . . ۱
- ۲.۱ انتگرال معین و نامعین و کاربرد آن در مهندسی . . . . . ۳
- ۱.۲.۱ انتگرال معین . . . . . ۳
- ۲.۲.۱ منحنی‌های قاطع یکدیگر . . . . . ۴
- ۳.۱ محاسبه طول منحنی‌ها با روشی ابتکاری . . . . . ۵
- ۴.۱ انتگرال‌های ناسره . . . . . ۶
- ۵.۱ محاسبه حجم جسم‌های حاصل از دوران . . . . . ۶
- ۱.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور  $x$ ها . . . . . ۷
- ۲.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور  $y$ ها . . . . . ۷
- تمرین‌ها . . . . . ۸

۱۱	۲ کاربرد انتگرال در محاسبه حجم
۱۱	۱.۲ قواعد انتگرال‌گیری نامعین
۱۲	۲.۲ تکنیک‌های انتگرال‌گیری
۱۲	۱.۲.۲ انتگرال‌گیری جزء به جزء
۱۲	۲.۲.۲ جانشینی ساده‌کننده
۱۳	۳.۲.۲ کسرهای جزئی
۱۳	۳.۲ ظاهر شدن انتگرال اصلی در فرایند انتگرال‌گیری
۱۵	۴.۲ سه جانشینی بنیادی
۱۵	تمرین‌ها
۱۷	آ چند یادآوری اساسی
۱۷	۱.آ استقرای ریاضی و چند مثال
۱۸	۲.آ مشتق‌های جزئی
۱۸	۳.آ بسط تبلیور
۱۹	۴.آ مختصات قطبی
۲۰	۵.آ بردارها در فضا و خواص آن‌ها
۲۱	۶.آ ضرب برداری
۲۳	پاسخ تمرین‌های برگزیده
۲۵	منابع
۲۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۹	نمایه





## فهرست نمادها

۲	.....	مشتق راست تابع $f$ در نقطه $x$	$f'_+(x)$
۳	.....	مشتق تابع $f$ در نقطه $x$	$f'(x)$
۶	.....	طول منحنی	$L$
۸	.....	مشتق چپ تابع $f$ در نقطه $x$	$f'_-(x)$





## مشتق و کاربرد آن در علوم مهندسی

مشتق‌ها به طور گسترده در علوم پایه، اقتصاد، پزشکی و علوم کامپیوتر برای محاسبه سرعت اولیه و شتاب و به منظور توضیح رفتار ماشین‌آلات، تخمین میزان افت آب در هنگام پمپ شدن آب از تانکر آب و پیشگویی نتایج ایجاد خطا در اندازه‌گیری‌ها به کار می‌رود. پیدا کردن مشتق‌ها می‌تواند طولانی و سخت باشد. می‌توان گفت مشتق یکی از ارکان اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال محسوب می‌شود. در این فصل، تکنیک‌هایی برای محاسبه آسان‌تر آن‌ها بیان می‌شود.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> George Thomas and Ross Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, Inc., USA, 9th edition, 1996. ISBN 0201400154

### ۱.۱ یادآوری حدهای یک‌طرفه و کاربرد آن‌ها

در این بخش ابتدا حدهای یک‌طرفه را یادآوری کرده و بعد از آن، به بیان مفهوم مشتق می‌پردازیم. سپس روابط و قضایای مشتق‌گیری را بیان می‌کنیم. در تعریف  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ،  $x$ ‌هایی را در نظر می‌گیریم که در یک بازه باز شامل  $a$  و نه خود  $a$  باشند؛ یعنی مقادیر  $x$  نزدیک به  $a$ ، چه بزرگ‌تر از  $a$  باشند و چه کوچک‌تر از آن باشند.

حال فرض کنید تابعی مانند  $f(x) = \sqrt{x-4}$  داریم. چون برای  $x < 4$ ، مقدار  $f(x)$  وجود ندارد، بنابراین  $f$  در هیچ بازه باز شامل  $4$  تعریف نشده است. لذا  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-4}$  بی‌معنی است. از آنجایی که استفاده از تعریف مشتق برای مشتق‌گیری از توابع، کاری زمان‌بر است، در این بخش، قضایایی را مطرح می‌کنیم که با کمک آن‌ها بتوان مشتق توابع را به سادگی

به دست آورد. شکل ۱.۱ را ببینید که در آن، ناحیه محصور بین نمودار  $y = 2 - x^2$  و خط  $y = -x$  را نشان می‌دهد.

با وجود این، اگر  $x$  را فقط به مقادیر بزرگ‌تر از ۴ محدود کنیم، می‌توانیم مقدار  $\sqrt{x - 4}$  را به اندازه دلخواه به ۰ نزدیک کنیم؛ در چنین حالتی،  $x$  را از سمت راست به ۴ میل می‌دهیم و آنرا حد یک‌طرفه از راست و یا حد راست می‌نامیم. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x - 4} = 0.$$

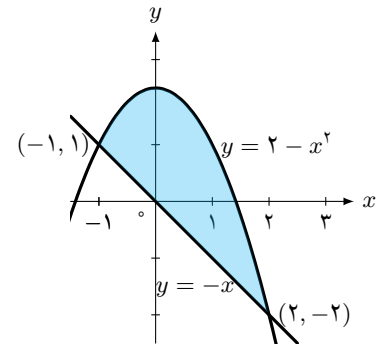
حد چپ نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود.<sup>۲</sup>

اگر تابع  $f$  در  $x_1$  تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست  $f$  در  $x_1$  با  $f'_+(x_1)$  نشان داده

می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

و یا به عبارت دیگر، تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. در ادامه، چند قضیه و مثال بیان می‌شود تا خواننده بیشتر با مفاهیم حد و مشتق آشنا شود.



شکل ۱.۱ ناحیه محصور ایجاد شده توسط سهمی  $y = 2 - x^2$  و خط  $y = -x$

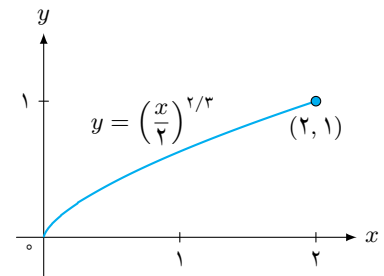
<sup>2</sup> Gerald Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, Inc., USA, 2nd edition, 1999. ISBN 0201400000

### قضیه ۱.۱.۱ وجود حد

گوییم  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  وجود دارد و برابر  $L$  است، اگر و تنها اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

هر دو موجود و برابر با  $L$  باشند.



شکل ۲.۱ نمودار تابع  $y = (x/2)^{2/3}$  در بازه  $[0, 2]$

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید تابع  $f$  مطابق شکل ۲.۱ و با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

تعریف شده است. آیا حد<sup>۳</sup> تابع  $f$  وجود دارد؟

<sup>۳</sup> در ادامه فرض می‌شود خواننده تا حدودی با مفاهیم پایه‌ای حد آشناست.

**حل** با توجه به تعریف تابع، اگر  $x$  عددی کوچک‌تر از ۰ باشد،  $f(x)$  دارای مقدار ثابت

-۱ است. لذا  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ . با استدلالی مشابه، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1.$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

۴ با مقایسه این مفهوم با کارهای اخیر صاحب‌جهرمی یا کازن، طبیعی است که این سوال را بپرسیم که آیا ارزیابی‌ها می‌توانند به اندازه‌های بورل توسیع یابند؟

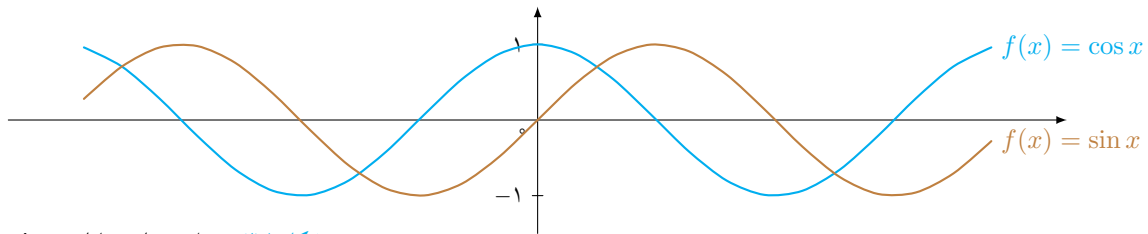
5 Jones  
6 Plotkin

مفهوم ارزیابی احتمال<sup>۴</sup>، ابتدا در ریاضیات مطرح شد و می‌توان گفت که در علوم کامپیوتر به صورت ضمنی استفاده می‌شود و فقط توسط جونز<sup>۵</sup> و پلاتکین<sup>۶</sup> به کار برده شده است.

**تعریف ۳.۱.۱** مشتق تابع  $f$ ، تابعی است که با علامت  $f'$  نشان داده می‌شود و مقدار آن در هر عدد  $x$  واقع در دامنه  $f$  به صورت

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. شکل ۳.۱ را ببینید.



شکل ۳.۱ نمودار دو تابع مثلثاتی  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$

## ۲.۱ انتگرال معین و نامعین و کاربرد آن در مهندسی

۷ خواننده باید دقت داشته باشد که تعریف انتگرال در کتاب‌های مختلف، اندکی از لحاظ ظاهری با یکدیگر تفاوت دارد.

۸ حسین خیری، وحید دامن‌افشان، مهسا مقدم، و وجیه وفاقی. نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی. انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ویرایش اول، ۱۳۹۰

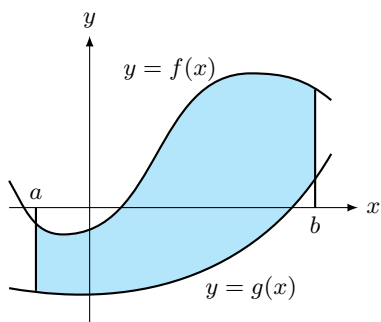
در این بخش، مفهوم انتگرال‌های معین و نامعین را توضیح داده<sup>۷</sup> و سپس خواص انتگرال معین بیان می‌شود. همچنین بعضی از کاربردهای انتگرال معین توضیح داده می‌شود. بعد از آن، نوبت به انتگرال‌های نامعین می‌رسد و روش‌های انتگرال‌گیری برای این نوع انتگرال‌ها شرح داده می‌شود.<sup>۸</sup>

### ۱.۲.۱ انتگرال معین

فرض کنید  $y = f(x)$  یک تابع پیوسته روی بازه  $[a, b]$  باشد. این بازه را به  $n$  زیربازه با انتخاب  $n - 1$  نقطه مانند  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  بین  $a$  و  $b$  تقسیم می‌کنیم به شرطی که

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

برای ایجاد یکنواختی،  $a$  را با  $x_0$  و  $b$  را با  $x_n$  نشان می‌دهیم. شکل ۴.۱ را ببینید.



شکل ۴.۱ ناحیه محصورشده بین دو منحنی  $y = g(x)$  و  $y = f(x)$

### قضیه ۱.۲.۱ قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌های معین

اگر  $f$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه یک  $c$  در بازه  $[a, b]$  وجود دارد به طوری که

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن را حساب کنیم.

اگر  $f$  و  $g$  توابع پیوسته‌ای روی بازه  $[a, b]$  و با شرط  $f(x) \geq g(x)$  باشند، آنگاه مساحت ناحیه بین منحنی‌های  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  از  $a$  تا  $b$  برابر است با<sup>۹</sup>

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (۳.۱)$$

<sup>9</sup> Charalambos Aliprantis and Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 3rd edition, 2006. ISBN 3540295860

### ۲.۲.۱ منحنی‌های قاطع یکدیگر

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع، حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. در فصل بعدی باز هم نمونه‌های دیگری را بررسی خواهیم کرد که باعث فهم بیشتر مبحث خواهد شد.

**نکته ۱.۱** (محاسبه مشتق) اگر  $x_1$  عدد خاصی از دامنه  $f$  باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۴.۱)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطه (۴.۱) برای محاسبه مشتق تابع  $f$  در یک نقطه خاص مانند  $x_1$  استفاده می‌شود. اگر در رابطه (۴.۱) قرار دهیم  $x_1 + \Delta x = x$ ، آنگاه عبارت « $\Delta x \rightarrow 0$ » معادل « $x \rightarrow x_1$ » است. بنابراین با توجه به فرمول (۴.۱) می‌توان نوشت

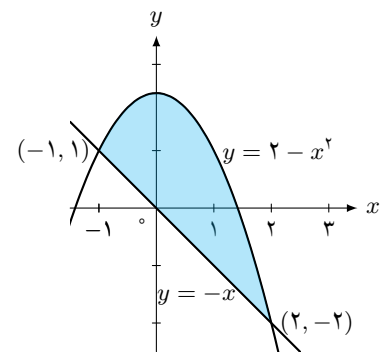
$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

تابع  $f$  را در  $x_1$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f'(x_1)$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $I$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f$  به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.

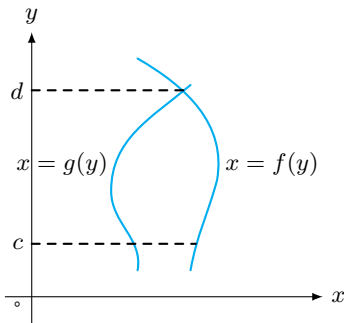
**مثال ۲.۲.۱** مساحت ناحیه محصور ایجاد شده توسط سهمی  $y = 2 - x^2$  و خط  $y = -x$  را پیدا کنید.

**حل** ابتدا نمودار هر دو منحنی را رسم می‌کنیم (شکل ۵.۱). طبق رابطه (۳.۱)، قرار می‌دهیم  $f(x) = 2 - x^2$  و  $g(x) = -x$ . حال برای پیدا کردن حدود انتگرال‌گیری، معادله  $-x = 2 - x^2$  را حل می‌کنیم. بنابراین  $x^2 - x - 2 = 0$ . لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx \end{aligned}$$



**شکل ۵.۱** محل تقاطع دو نمودار  $y = -x$  و  $y = 2 - x^2$



شکل ۶.۱ نمودار منحنی‌های  $x = g(y)$  و  $x = f(y)$  در بازه  $[c, d]$

دقت داشته باشید که در فرمول (۵.۱) اگر  $r(x)$  در سراسر بازه  $[a, b]$  صفر باشد، همان فرمول روش دیسک، نتیجه می‌شود. بنابراین روش دیسک، حالت خاصی از روش واشر است.

$$= \left[ 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

$$= \left( 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

روش گفته شده در بالا، روش دیسک (شکل ۶.۱) نام دارد. روش دیگری نیز برای محاسبه حجم حاصل از دوران وجود دارد که به روش واشر، معروف شده است.

**تعریف ۳.۲.۱**

**روش واشر** هرگاه ناحیه‌ای که برای تولید یک جسم، دوران داده می‌شود، محور دوران را قطع نکند، جسم تولید شده، دارای یک سوراخ خواهد بود. در این روش از فرمول

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \tag{5.1}$$

استفاده می‌شود که در آن، شعاع بیرونی و شعاع داخلی واشر است.

سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام یک از روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید.

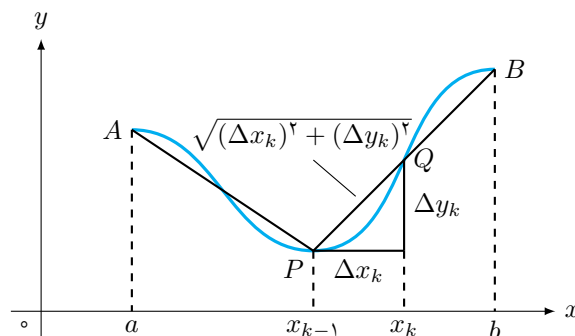
$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy + \int_0^1 \pi\left(\left[\frac{3}{2} - \sqrt{y}\right]^2\right) dy + -\pi \int_0^1 (3\sqrt{y} - y) dy - \pi\left[2y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

**۳.۱ محاسبه طول منحنی‌ها با روشی ابتکاری**

<sup>10</sup> George Thomas and Ross Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, Inc., USA, 9th edition, 1996. ISBN 0201400154

فرض کنید می‌خواهیم طول منحنی  $y = f(x)$  را از  $x = a$  تا  $x = b$  پیدا کنیم. طبق معمول، بازه  $[a, b]$  را افزایش می‌کنیم و نقاط متناظر روی منحنی را با قطعه‌خط‌هایی به همدیگر وصل می‌کنیم تا یک مسیر چندضلعی تشکیل شود (شکل ۷.۱).

شکل ۷.۱ مسیر چندضلعی پوشاننده طول منحنی  $y = f(x)$  از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$

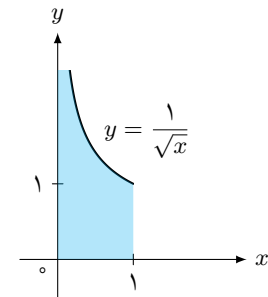


**تعریف ۱.۳.۱** اگر  $f$  روی بازه  $[a, b]$  هموار باشد، طول منحنی  $y = f(x)$  از  $a$  تا  $b$  برابر

است با

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (۶.۱)$$

گاهی ممکن است  $dy/dx$  در یک نقطه خاص از بازه انتگرال‌گیری موجود نباشد. در این حالت  $dx/dy$  را حساب می‌کنیم و  $x$  را بر حسب تابعی از  $y$  بیان می‌کنیم (شکل ۸.۱).



شکل ۸.۱ نمونه‌ای از تابعی با برد نامعین

## ۴.۱ انتگرال‌های ناسره

انتگرال‌های معینی که تا اینجا با آن‌ها سر و کار داشته‌ایم، دارای دو ویژگی بوده‌اند. یکی اینکه، دامنه انتگرال‌گیری آن‌ها، یعنی  $a$  و  $b$  معین بود. دوم اینکه، برد انتگرال‌ده روی این دامنه، معین بود. در این بخش یاد می‌گیریم که چگونه باید با این انتگرال‌ها برخورد کنیم (جدول ۱.۱).

**مثال ۱.۴.۱** همگرایی

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

را بررسی کنید.

**حل** انتگرالده  $f(x) = 1/(x-1)^{2/3}$  در  $x = 1$  نامتناهی می‌شود؛ اما روی  $(0, 1)$  و  $(1, 3]$  پیوسته است. همگرایی انتگرال روی  $[0, 3]$  به انتگرال‌های از  $0$  تا  $1$  و  $1$  تا  $3$  بستگی دارد. روی  $[0, 1]$  داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} [3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}] \\ &= 3. \end{aligned}$$

## ۵.۱ محاسبه حجم جسم‌های حاصل از دوران

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبه حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. در ادامه در ادامه درباره حجم این نوع جسم‌ها بحث می‌کنیم.

**جدول ۱.۱** نحوه عملکرد تابع  $f$  در ارتباط با

نام تابع	نقطه ناپیوستگی	نقطه بحرانی
تابع $f$	$x = 1$	$a^2 + 3$
تابع $g$	$x = -2$	$b - 4$
تابع $h$	$x = 0$	$a + b - 7$



۱.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور  $x$  ها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین محور  $x$  ها و نمودار تابع پیوسته  $a \leq x \leq b, y = R(x)$  حول محور  $x$  ها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi(R(x))^2 dx \tag{۷.۱}$$

حال می‌توان کد این رابطه را به صورت زیر نوشت.<sup>۱۱</sup>

کد ۱.۱ محاسبه حجم جسم حاصل از دوران

```

۱ \def\makechapterhead#1{%
۲ \vspace*{50\p@}%
۳ {\parindent \z@ \raggedright \normalfont
۴ \ifnum \c@secnumdepth >\m@ne
۵ \if@mainmatter
۶ \huge\bfseries \@chapapp\space \thechapter
۷ \par\nobreak
۸ \vskip 20\p@
۹ \fi
۱۰ \fi
۱۱ \interlinepenalty\M
۱۲ \Huge \bfseries #1\par\nobreak
۱۳ \vskip 40\p@
۱۴ }}
    
```

<sup>11</sup>George Thomas and Ross Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, Inc., USA, 9th edition, 1996. ISBN 0201400154

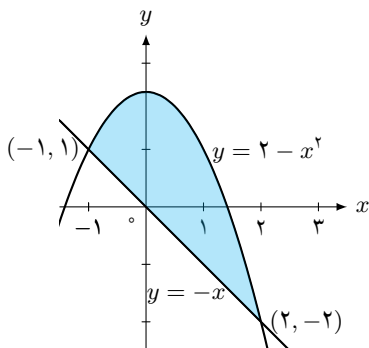
۲.۵.۱ حجم حاصل از دوران حول محور  $y$  ها

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین محور  $y$  ها و نمودار تابع پیوسته  $c \leq y \leq d, x = R(y)$  حول محور  $y$  ها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^2 dy \tag{۸.۱}$$

حال اگر بتوانیم فرمولی برای طول مسیر ایجاد شده بیابیم، آنگاه فرمولی برای تقریب طول منحنی  $AB$  نیز خواهیم داشت.

**مثال ۱.۵.۱** مساحت ناحیه‌ای در ربع اول که از بالا به  $y = \sqrt{x}$  و از پایین به محور  $x$  ها و خط  $y = x - 2$  محدود است را بیابید.



**شکل ۹.۱** محل تقاطع دو نمودار  $y = -x$  و  $y = 2 - x^2$

**حل** ابتدا نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل بالا، مرز سمت راستی ناحیه، خط  $x = y + 2$  است. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ لذا  $f(y) = y + 2$  است و مرز  $y = -1$  و  $y = 2$  است. حال چون، مقدار  $y = -1$ ، یک نقطه تقاطع پایین محور  $x$  ها را به دست می‌دهد، لذا قابل قبول نیست. بنابراین فقط مقدار  $y = 2$  قابل قبول بوده و

لذا  $b = 2$  است. از طرفی، حال از رابطه بالا استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [f(y) - g(y)] dy = \int_0^2 [2 + y - y^2] dy \\ &= \left[ 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، نتیجه به دست آمده، با نتیجه مثال قبل یکسان است و با مقدار محاسبات کمتری به دست آمده است. همچنین دقت شود که در این مثال، چون نسبت به  $y$  انتگرال گرفته‌ایم، تنها یک انتگرال‌گیری لازم است.

**تعریف ۲.۵.۱** اگر تابع  $f$  در  $x_1$  تعریف شده باشد، آنگاه مشتق چپ  $f$  در  $x_1$  با  $f'_-(x_1)$

نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (9.1)$$

## تمرین‌ها

**۷.۱** مشتق تابع  $y = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)(x + 1)$  را حساب کنید.

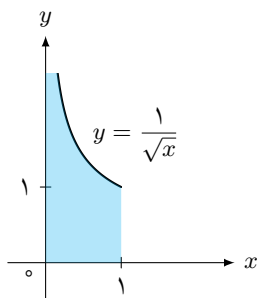
کنید.

**۸.۱** مشتق

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

را حساب کنید.

**۹.۱** طول منحنی زیر را چطور می‌توان محاسبه کرد؟



**۱۰.۱** اگر  $f(x)$  تابعی باشد به طوری که  $f(4) = -3$  و  $f'(4) = 5$

و  $g$  تابعی باشد به طوری که  $g(x) = f(x)/x$  باشد،

$g'(4)$  را به دست آورید.

**۱.۱** اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، مشتق آن را حساب کنید.

**۲.۱** نشان دهید مقدار

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$$

نمی‌تواند ۲ باشد.

**۳.۱** از نامساوی  $\cos x \geq (1 - x^2)/2$  که برای هر  $x$  برقرار

است، استفاده کنید و یک کران پایین برای مقدار  $\int_0^1 \cos x dx$

پیدا کنید.

**۴.۱** مشتق تابع  $f(x) = 3x^2 + 12$  را در نقطه  $x = 2$  حساب

کنید.

**۵.۱** اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، تعیین کنید که  $f$  در کجا

مشتق‌پذیر است؟

**۶.۱** متحرکی روی نمودار  $y = \sqrt{x-2}$  با فرض  $x \geq 2$  حرکت

می‌کند. اگر مؤلفه  $x$  آن با آهنگ ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد،

در لحظه‌ای که  $x = 6$  است، آهنگ تغییر مؤلفه  $y$  آن برابر

چيست؟ آیا متحرک در حال صعود است یا نزول؟

۱۱.۱ اگر تابع  $f$  به صورت

$$y = \sin x - 2 \cos x \quad (10.1)$$

داده شده باشد، رابطه‌ای بین  $y$  و  $y'$  بیابید که به  $x$  بستگی نداشته باشد.

۱۲.۱ مشتق تابع  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  را حساب کنید.

۱۳.۱ اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = -1$$

باشد، مشتق  $y = f(x^2 + x + 1)$  را در نقطه  $x = 1$  حساب کنید.

۱۴.۱ اگر

$$f(\sin x - \cos x) = \sqrt{2}g\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

و  $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$  باشد،  $f'(0)$  را حساب کنید.

۱۵.۱ در معادله زیر،  $dy/dx$  را به دست آورید.

$$2y = x^2 + \sin y.$$

۱۶.۱ مشتق معادله پارامتری

$$x = 3t^4 + t^2 - 5, \quad y = 6t^2 - t$$

را به دست آورید.

۱۷.۱ فرض کنید  $f$  و  $g$  توابع حقیقی و مشتق‌پذیر باشند و  $f(0) = 0$ 

و  $g(0) = 0$  و  $g'(x) \neq 0$  باشد. ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

۱۸.۱ مشتق تابع  $y = \arcsin x$  را به دست آورید.۱۹.۱ مشتق تابع  $y = \arctan x$  را به دست آورید.

۲۰.۱ معادله خط مماس بر منحنی

$$y = \arcsin \frac{x-1}{x+2}$$

را در نقطه تلاقی منحنی با محور  $y$ ها را بنویسید.

۲۱.۱ در تابع

$$f(x) = \frac{5x+1}{x-1},$$

مقدار  $(f^{-1})'(11)$  را به دست آورید.

۲۲.۱ در تابع

$$y = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}},$$

رابطه‌ای بین  $y$ ،  $y'$  و  $y''$  بیابید که مستقل از  $x$  باشد.

۲۳.۱ در تابع

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}},$$

رابطه‌ای بین  $y$ ،  $y'$  و  $y''$  بیابید که مستقل از  $x$  باشد.

۲۴.۱ نشان دهید اگر  $f$  روی  $[a, b]$ ،  $a \neq b$  پیوسته باشد و اگر

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

آنگاه در حداقل یک نقطه از  $[a, b]$ ،  $f(x) = 0$  است.



## کاربرد انتگرال در محاسبه حجم

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. شعر انواع مختلفی دارد که از آن جمله می‌توان به کلاسیک، مذهبی و عاشقانه اشاره کرد. شعر عاشقانه فارسی نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. در اینجا چند واژه تخصصی مثل منحنی، معادله خطی، عملگر، تبدیل کلی، چندجمله‌ای مشخصه و موهومی، نگاشت، مارپیچ و آونگ ایده‌آل نیز داریم. در فصل‌های بعدی نیز با نگاشت بی‌نقص، نمودار، نامساوی، پایداری، همگرایی، زاویه حاده، نماد جمعی، خط‌های ناموازی، مارپیچ، صعود، فلش، مخروط، مجانبی، گشتاور، گونیا و کمان آشنا می‌شویم.

### ۱.۲ قواعد انتگرال‌گیری نامعین

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین محور  $x$ ‌ها و نمودار تابع پیوسته  $y = R(x)$ ،  $a \leq x \leq b$  حول محور  $x$ ‌ها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi(R(x))^2 dx \quad (1.2)$$

**مثال ۱.۱.۲** ناحیه بین منحنی  $y = \sqrt{x}$ ،  $0 \leq x \leq 4$  و محور  $x$ ‌ها، برای تولید جسمی، حول محور  $x$ ‌ها دوران داده می‌شود. حجم آن‌را را پیدا کنید.

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین محور  $y$  ها و نمودار تابع پیوسته  $x = R(y)$ ،  $c \leq y \leq d$  حول محور  $y$  ها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^2 dy \quad (۲.۲)$$

## ۲.۲ تکنیک‌های انتگرال‌گیری

### انتگرال‌گیری جزء به جزء

۱.۲.۲

انتگرال‌گیری جزء به جزء یکی از تکنیک‌هایی است که برای ساده کردن انتگرال‌هایی به فرم

$$\int f(x)g(x)dx \quad (۳.۲)$$

به کار می‌رود؛ به شرطی که در آن، از  $f$  بتوان بارها مشتق گرفت و از  $g$  نیز بتوان به سادگی، انتگرال گرفت. انتگرال

$$\int xe^x dx,$$

یک نمونه از چنین انتگرالی است؛ زیرا از  $f(x) = x$  می‌توان دو بار مشتق گرفت تا صفر شود و از  $g(x) = e^x$  نیز می‌توان به سادگی، بارها انتگرال گرفت. انتگرال‌گیری جزء به جزء، همچنین برای انتگرال‌هایی مانند

$$\int e^x \sin x dx$$

که در آن‌ها، هر قسمت از انتگرالده بعد از مشتق‌گیری و یا انتگرال‌گیری مکرر، دوباره تکرار می‌شوند، نیز به کار می‌رود.

### جانشینی ساده‌کننده

۲.۲.۲

گوییم تابع  $F(x)$  یک ضدمشتق تابع  $f(x)$  است، هر گاه برای هر  $x$  در دامنه  $f$  داشته باشیم

$$F'(x) = f(x).$$

مجموعه تمام ضدمشتق‌های  $f$ ، انتگرال نامعین  $f$  نسبت به  $x$  نامیده شده و با علامت

$$\int f(x)dx$$

نشان داده می‌شود.

## کسرهای جزئی

۳.۲.۲

طبق قضیه مقدار میانگین، می‌دانیم توابع با مشتق یکسان، در یک عدد ثابت با یکدیگر اختلاف دارند. به عبارت دیگر، اگر دو تابع  $f$  و  $g$ ، مشتق یکسانی داشته باشند، آنگاه  $f(x) = g(x) + C$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق  $F$  برای تابع  $f$  پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر  $f$  در یک ثابت، با  $F$  تفاوت دارند. می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق  $F$  برای تابع  $f$  پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر  $f$  در یک ثابت، با  $F$  تفاوت دارند. این حالت را در انتگرال‌گیری با

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

نشان می‌دهیم.

## ۳.۲ ظاهر شدن انتگرال اصلی در فرایند انتگرال‌گیری

در این بخش چند حکم را با هم مرور می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲ مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد.

برهان به دلیل سادگی برهان، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۲.۳.۲ مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد.

نتیجه ۳.۳.۲ مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد.

ملاحظه ۴.۳.۲ مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد.

اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، مشتق آن را حساب کنید. اگر  $x$  عددی در دامنه  $f$  باشد، با استفاده از مطالب قبلی داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 + 12 - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3(\Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

و لذا مشتق تابع  $f$  به دست می‌آید. اگر  $x_1$  عدد خاصی از دامنه  $f$  باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (4.2)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطه (۴.۲) برای محاسبه مشتق تابع  $f$  در یک نقطه خاص مانند  $x_1$  استفاده می‌شود.

اگر در رابطه (۴.۲) قرار دهیم  $x_1 + \Delta x = x$ ، آنگاه عبارت « $\Delta x \rightarrow 0$ » معادل « $x \rightarrow x_1$ » است. بنابراین با توجه به فرمول (۴.۱) می‌توان

نوشت

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (5.2)$$

مشتق تابع  $f(x) = 3x^2 + 12$  را در نقطه  $x = 2$  حساب کنید.

و لذا مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  به دست می‌آید. تابع  $f$  را در  $x_1$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f'(x_1)$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $I$

مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f$  به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد. اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، تعیین کنید که  $f$  در کجا مشتق‌پذیر

است؟ از آنجایی که  $f'(x) = 6x$  و برای تمام اعداد حقیقی موجود است، لذا نتیجه می‌شود که  $f$  در همه جا مشتق‌پذیر است. اگر تابع  $f$  در

$x_1$  تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست  $f$  در  $x_1$  با  $f'_+(x_1)$  نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (6.2)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (7.2)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. اگر تابع  $f$  در  $x_1$  تعریف شده باشد، آنگاه مشتق چپ  $f$  در  $x_1$  با  $f'_-(x_1)$  نشان داده می‌شود

و به صورت

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (8.2)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (9.2)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. فرض کنید تابع  $f$  به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ 8 - x & 3 \leq x \end{cases}$$

تعریف شده است. پیوستگی و مشتق‌پذیری این تابع را در نقطه  $x = 3$  بررسی کنید. برای بررسی پیوستگی، سه شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم.

(۱) داریم  $f(3) = 5$ . بنابراین شرط اول که همان موجود بودن  $f(3)$  است، برقرار است. (۲) برای بررسی شرط دوم داریم

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 1) = 5$$



و

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (\lambda - x) = 5.$$

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$  و لذا شرط دوم هم برقرار است.  $f(3) = f(3)$  (۳) بنابراین  $f$  در ۳ پیوسته است. حال مشتق پذیری  $f$  را در ۳ بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(2(3 + \Delta x) - 1) - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

## ۴.۲ سه جانشینی بنیادی

تابع  $f$  را در  $x_1$  مشتق پذیر گوئیم، اگر  $f'(x_1)$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $I$  مشتق پذیر گوئیم، اگر  $f$  به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق پذیر باشد.

### تمرین‌ها

- ۱.۲ اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، مشتق آن را حساب کنید.
- ۲.۲ نشان دهید مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد.
- ۳.۲ از نامساوی  $\cos x \geq (1 - x^2/2)$  که برای هر  $x$  برقرار است، استفاده کنید و یک کران پایین برای مقدار  $\int_0^1 \cos x dx$  پیدا کنید.
- ۴.۲ مشتق تابع  $f(x) = 3x^2 + 12$  را در نقطه  $x = 2$  حساب کنید.
- ۵.۲ اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، تعیین کنید که  $f$  در کجا مشتق پذیر است؟
- ۶.۲ اگر  $f(x)$  تابعی باشد به طوری که  $f(4) = -3$  و  $f'(4) = 5$  و  $g$  تابعی باشد به طوری که  $g(x) = f(x)/x$  باشد،  $g'(4)$  را به دست آورید.
- ۷.۲ مشتق تابع  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  را حساب کنید.
- ۸.۲ متحرکی روی نمودار  $y = \sqrt{x - 2}$  با فرض  $x \geq 2$  حرکت می‌کند. اگر مؤلفه  $x$  آن با آهنگ ۲ متر بر ثانیه افزایش یابد، در لحظه‌ای که  $x = 6$  است، آهنگ تغییر مؤلفه  $y$  آن برابر چیست؟ آیا متحرک در حال صعود است یا نزول؟
- ۹.۲ مشتق تابع  $y = \arcsin x$  را به دست آورید.
- ۱۰.۲ مشتق تابع  $y = \arctan x$  را به دست آورید.
- ۱۱.۲ معادله خط مماس بر منحنی  $y = \arcsin \frac{x-1}{x+2}$  را در نقطه تلاقی منحنی با محور  $y$ ‌ها را بنویسید.
- ۱۲.۲ در تابع  $f(x) = \frac{5x+1}{x-1}$  مقدار  $(f^{-1})'(11)$  را به دست آورید.



## چند یادآوری اساسی

جسم‌های حاصل از دوران، جسم‌هایی هستند که شکل آن‌ها از دوران حول محورها به دست می‌آید. گاهی جسم‌های تولید شده، جسم‌هایی هستند که با استفاده از فرمول‌های هندسه، به راحتی می‌توانیم حجم آن‌ها را حساب کنیم؛ اما گاهی شکل این جسم‌ها، منظم نیست و لذا ناچاریم برای محاسبه حجم آن‌ها از حساب دیفرانسیل و انتگرال کمک بگیریم. ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن‌را حساب کنیم.

### ۱.۰ استقرای ریاضی و چند مثال

وقتی ناحیه‌ای توسط منحنی‌هایی که یکدیگر را قطع می‌کنند، مشخص می‌شود، نقاط تقاطع، حدود انتگرال‌گیری را تعیین می‌کنند. مثال بعدی، نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. سوالی که ممکن است در اینجا پیش بیاید این است که کدام یک از ۳ روش گفته شده، بهتر است؟ واقعیت این است که به طور قطع، نمی‌توان گفت که کدام روش، همیشه بهتر از بقیه عمل می‌کند. بنابراین در هر مساله، باید ابتدا ناحیه مورد نظر را رسم کرده و سپس با توجه به آن، بهترین روش را انتخاب کنیم.

## ۲.آ مشتق‌های جزئی

تابع  $f$  را در  $x_1$  مشتق‌پذیر گوییم، اگر  $f'(x_1)$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $I$  مشتق‌پذیر گوییم، اگر  $f$  به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد. اگر فرض کنیم  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، مشتق آن را حساب کنید. اگر  $x$  عددی در دامنه  $f$  باشد، با استفاده از مطالب قبلی داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 + 12 - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3(\Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

و لذا مشتق تابع  $f$  به دست می‌آید.

## ۳.آ بسط تیلور

ناحیه ممکن است دارای شکل خاصی باشد که در این صورت، با استفاده از فرمول‌های هندسه می‌توانیم مساحت آن را حساب کنیم. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین محور  $x$  ها و نمودار تابع پیوسته  $y = R(x)$ ،  $a \leq x \leq b$  حول محور  $x$  ها برابر است با

$$V = \int_a^b \pi(R(x))^2 dx \quad (1.A)$$

**مثال ۱.۳.آ** ناحیه بین منحنی  $y = \sqrt{x}$ ،  $0 \leq x \leq 4$  و محور  $x$  ها، برای تولید جسمی، حول محور  $x$  ها دوران داده می‌شود. حجم آن را پیدا کنید.

فرض کنید  $y = f(x)$  یک تابع پیوسته روی بازه  $[a, b]$  باشد. این بازه را به  $n$  زیربازه با انتخاب  $n - 1$  نقطه مانند  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  بین  $a$  و  $b$  تقسیم می‌کنیم. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین محور  $y$  ها و نمودار تابع پیوسته  $x = R(y)$ ،  $c \leq y \leq d$  حول محور  $y$  ها برابر است با

$$V = \int_c^d \pi(R(y))^2 dy \quad (2.A)$$

### ۴.آ مختصات قطبی

اگر در رابطه (۲.آ) قرار دهیم  $x = x_1 + \Delta x$ ، آنگاه عبارت « $\Delta x \rightarrow 0$ » معادل « $x \rightarrow x_1$ » است. بنابراین با توجه به فرمول (۲.آ) می‌توان نوشت

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (۳.آ)$$

مشتق تابع  $f(x) = 3x^2 + 12$  را در نقطه  $x = 2$  حساب کنید. لذا مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  به دست می‌آید.

**نکته ۱.آ** طبق قضیه مقدار میانگین، می‌دانیم توابع با مشتق یکسان، در یک عدد ثابت با یکدیگر اختلاف دارند. به عبارت دیگر، اگر دو تابع  $f$  و  $g$ ، مشتق یکسانی داشته باشند، آنگاه  $f(x) = g(x) + C$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق  $F$  برای تابع  $f$  پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر  $f$  در یک ثابت، با  $F$  تفاوت دارند. می‌توان نتیجه گرفت که هر گاه یک ضدمشتق  $F$  برای تابع  $f$  پیدا کنیم، ضدمشتق‌های دیگر  $f$  در یک ثابت، با  $F$  تفاوت دارند. این حالت را در انتگرال‌گیری با

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

نشان می‌دهیم.

تابع  $f$  را در  $x_1$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f'(x_1)$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $I$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f$  به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد. اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، تعیین کنید که  $f$  در کجا مشتق‌پذیر است؟ از آنجایی که  $f'(x) = 6x$  و برای تمام اعداد حقیقی موجود است، لذا نتیجه می‌شود که  $f$  در همه جا مشتق‌پذیر است. اگر تابع  $f$  در  $x_1$  تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست  $f$  در  $x_1$  با  $f'_+(x_1)$  نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۴.آ)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (۵.آ)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند. اگر تابع  $f$  در  $x_1$  تعریف شده باشد، آنگاه مشتق چپ  $f$  در  $x_1$  با  $f'_-(x_1)$  نشان داده می‌شود و به صورت

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۶.آ)$$

و یا به عبارت دیگر،

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (۷.آ)$$

تعریف می‌شود؛ به شرطی که این حدود موجود باشند.

## ۵.آ بردارها در فضا و خواص آنها

در این بخش چند حکم را با هم مرور می‌کنیم. مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد. به دلیل سادگی برهان، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، مشتق آن را حساب کنید. اگر  $x_1$  عدد خاصی از دامنه  $f$  باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۸.آ)$$

البته به شرطی که این حد وجود داشته باشد. از رابطه (۸.آ) برای محاسبه مشتق تابع  $f$  در یک نقطه خاص مانند  $x_1$  استفاده می‌شود.

فرض کنید تابع  $f$  به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ 8 - x & 3 \leq x \end{cases}$$

تعریف شده است. پیوستگی و مشتق‌پذیری این تابع را در نقطه  $x = 3$  بررسی کنید. برای بررسی پیوستگی، سه شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. (۱) داریم  $f(3) = 5$ . بنابراین شرط اول که همان موجود بودن  $f(3)$  است، برقرار است. (۲) برای بررسی شرط دوم داریم

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 1) = 5$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (8 - x) = 5.$$

بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5 = f(3)$  و لذا شرط دوم هم برقرار است. (۳)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ . بنابراین  $f$  در ۳ پیوسته است. حال مشتق‌پذیری  $f$  را در ۳ بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(2(3 + \Delta x) - 1) - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

در این بخش چند حکم را با هم مرور می‌کنیم. مقدار  $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x} dx$  نمی‌تواند ۲ باشد. به دلیل سادگی برهان، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

## آ. ضرب برداری

تابع  $f$  را در  $x_1$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f'(x_1)$  وجود داشته باشد. تابع  $f$  را روی بازه  $I$  مشتق‌پذیر گوئیم، اگر  $f$  به ازای هر عدد واقع در این بازه، مشتق‌پذیر باشد.

کد آ.۱ روش به دست آوردن انتگرال نامعین

```

۱ \newcommand{\@tufte@lof@line}[2]{%
۲ \leftskip 0.0em
۳ \rightskip 0em
۴ \parfillskip 0em plus 1fil
۵ \parindent 0.0em
۶ \@afterindenttrue
۷ \interlinepenalty\@M
۸ \leavevmode
۹ \@tempdima 2.0em
۱۰ \advance\leftskip\@tempdima
۱۱ \null\nobreak\hskip -\leftskip
۱۲ {#1}\nobreak\quad\nobreak#2%
۱۳ \par%
۱۴ }

```





# پاسخ تمرین‌های برگزیده

## فصل ۱

۱.۱  $6x$

۳.۱ ۲

۴.۱ با مشتق‌گیری داریم  $f'(2) = f(2) = 12$

۵.۱ تابع  $f$  در همه جا مشتق‌پذیر است.

۶.۱ -۶. نزول می‌کند.

۷.۱ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$y = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

$$\text{بنابراین } y' = 2x$$

۱۰.۱  $1/2$

۱۳.۱ بعد از ساده کردن عبارت، نتیجه می‌شود  $y' = 3$ .

۱۴.۱ با استفاده از مطالب گفته‌شده نتیجه می‌شود  $f'(0) = -2$

$$15.1 \quad dy/dx = 3xy - 2y$$

$$16.1 \quad y'(t) = 12t - 1 \text{ و } x'(t) = 12t^3 + 2t$$

$$20.1 \quad y = 2x - 6$$

۲۱.۱ با استفاده از تعریف مشتق تابع وارون، می‌توان نوشت

$$(f^{-1})'(11) = -3$$

$$22.1 \quad 2y^2 = y''y - 3y'^2$$

$$23.1 \quad y^4 + y''y - 3y'^2 = 0$$

## فصل ۲

۱.۲  $6x$

۲.۲ با استفاده از مطالب گفته‌شده و نیز تعریف مشتق نتیجه می‌شود

۲

۳.۲ با مشتق‌گیری داریم  $f'(2) = f(2) = 12$

۴.۲ تابع  $f$  در همه جا مشتق‌پذیر است.

۵.۲ -۶. نزول می‌کند.

۶.۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$y = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

$$y' = 2x \text{ بنابراین}$$

$$1/2 \quad 7.2$$

بعد از ساده کردن عبارت، نتیجه می‌شود  $y' = 3$ . ۸.۲

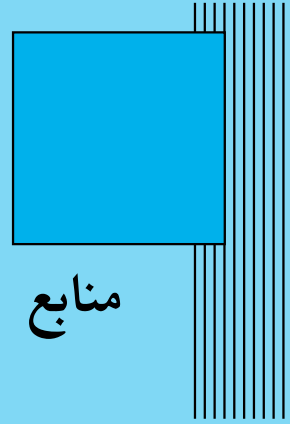
$$y = 2x - 6 \quad 9.2$$

با استفاده از تعریف مشتق تابع وارون، می‌توان نوشت ۱۰.۲

$$(f^{-1})'(11) = -3$$

$$2y^2 = y''y - 3y'^2 \quad 11.2$$

$$y^4 + y''y - 3y'^2 = 0 \quad 12.2$$

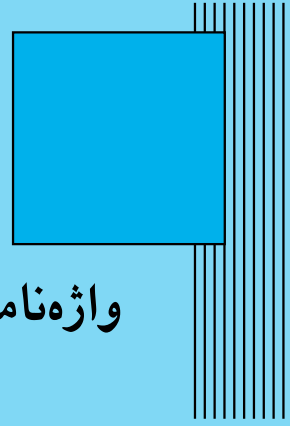


## منابع

- [۱] حسین خیری، وحید دامن افشان، مهسا مقدم، و وجیهه وفائی. نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم‌های دینامیکی. انتشارات دانشگاه تبریز، تبریز، ویرایش اول، ۱۳۹۰.
- [2] Charalambos Aliprantis and Kim Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 3rd edition, 2006. ISBN 3540295860.
- [3] Gerald Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, Inc., USA, 2nd edition, 1999. ISBN 0201400000.
- [4] George Thomas and Ross Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, Inc., USA, 9th edition, 1996. ISBN 0201400154.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی



Map ..... نگاشت  
Perfect ..... بی نقص  
Notation ..... نماد  
Additive ..... جمعی  
Diagram ..... نمودار  
Convergence ..... همگرایی

Ascension ..... صعود  
Operator ..... عملگر  
Arrow ..... فلش  
Bow ..... کمان

Moment ..... گشتاور  
Bevel ..... گونیا

Spiral ..... مارپیچ  
Asymptotic ..... مجانبی  
Cone ..... مخروط  
Equation ..... معادله  
Linear ..... خطی  
Curve ..... منحنی

Inequality ..... نامساوی  
Antiparallel ..... ناموازی

Pendulum ..... آونگ  
Ideal ..... ایده آل

Stability ..... پایداری

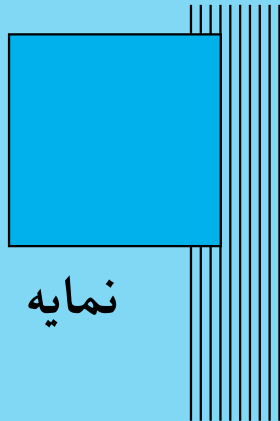
Transform ..... تبدیل  
Global ..... کلی

Polynomial ..... چندجمله‌ای  
Characteristic ..... مشخصه  
Imaginary ..... موهومی

Angle ..... زاویه  
Acute ..... حاده

Poem ..... شعر  
Romantic ..... عاشقانه  
Persian ..... فارسی  
Classic ..... کلاسیک  
Religious ..... مذهبی





## نمایه

- ا**  
ارزیابی: ۳  
افراز: ۵  
اکید: ۸  
انتگرال  
معین: ۳  
نامعین: ۱۱  
انتگرالده: ۶
- پ**  
پیشگویی: ۱
- ت**  
تابع: ۸  
اکیداً صعودی: ۸  
اکیداً نزولی: ۸  
تابع پیوسته: ۱، ۳، ۷، ۱۲، ۱۸
- ج**  
جسم حاصل از دوران: ۵، ۷، ۱۲، ۱۸
- چ**  
چندجمله‌ای: ۱۱  
مشخصه: ۱۱  
چینش: ۸
- ح**  
حجم جسم حاصل از دوران: ۸
- حد**  
چپ: ۲  
راست: ۲  
یک‌طرفه: ۱  
حدود انتگرال‌گیری: ۴  
حرکت پرتابه: ۸  
حساب دیفرانسیل: ۱، ۶
- د**  
دلتا: ۸  
دوران: ۵، ۸  
دیورژانس: ۸
- ر**  
ردیف: ۸  
روش  
انتگرال‌گیری جزء به جزء: ۱۲  
جانشینی ساده‌کننده: ۱۲، ۱۳  
دیسک: ۵  
رادیکالی: ۵  
واشر: ۵
- ز**  
زاویه فاز: ۸  
زتا: ۸
- س**  
سرعت اولیه: ۱
- ش**  
شتاب: ۱  
شعاع  
بیرونی واشر در دوران: ۵، ۸  
داخلی واشر در دوران: ۵  
شعر: ۱۱  
عاشقانه: ۱۱  
فارسی: ۱۱  
کلاسیک: ۱۱  
مذهبی: ۱۱
- ط**  
طول منحنی: ۵
- ع**  
علوم کامپیوتر: ۱  
عملگر: ۸  
خطی: ۸
- گ**  
گرادیان: ۸  
گرانش: ۸  
گشتاور: ۸
- ل**  
لاپلاس: ۸  
لاگرانژ: ۸  
لژاندر: ۸

## م

- مثلث، ۸
- مساحت، ۴، ۱۷، ۱۸
- مشتق، ۱، ۳
- جهتی، ۸

## ن

- نپر، ۸
- نقاط تقاطع، ۴، ۱۷
- نمودار منحنی، ۴

## و

- وارون تابع، ۸
- واژگونی، ۸
- ویرایش، ۸

## ه

- هم‌پوشانی، ۸
- هم‌پیمانه، ۸
- هم‌پیوستگی، ۸





# Calculus and Analytic Geometry

**Vahid Damanafshan**

Instructor Of The Kermanshah University

Kermanshah University Press  
2022